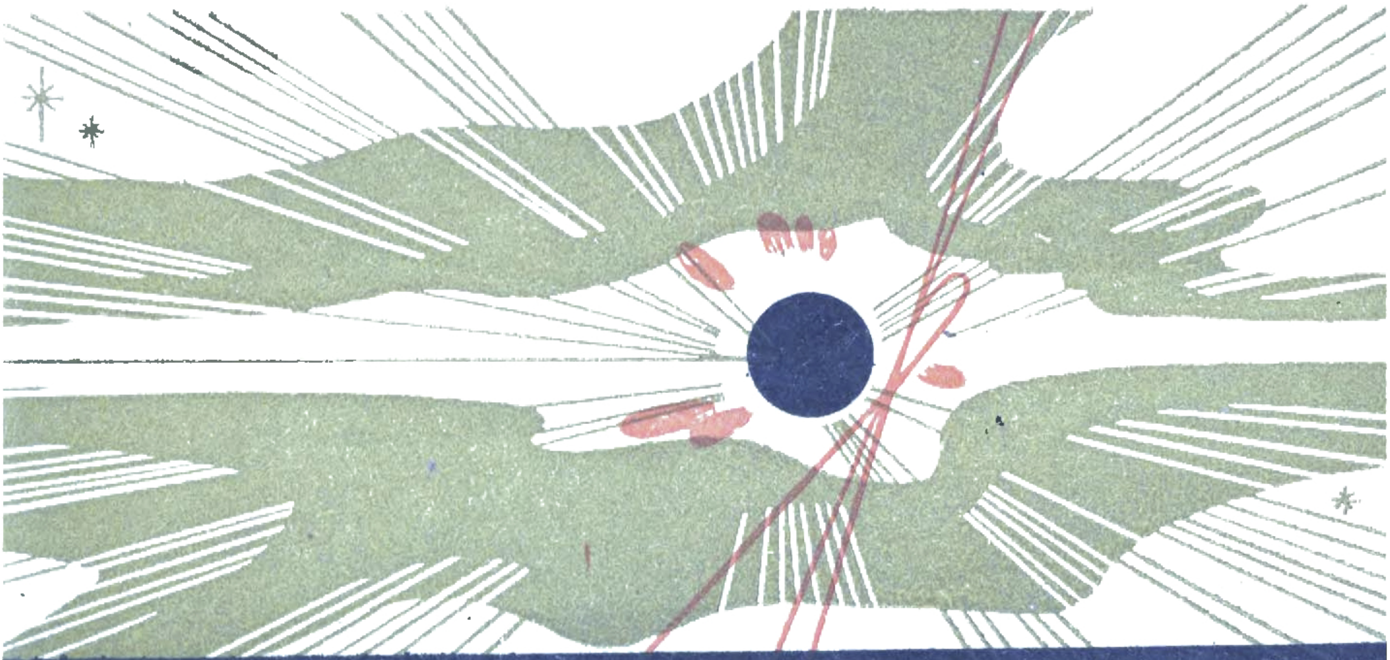
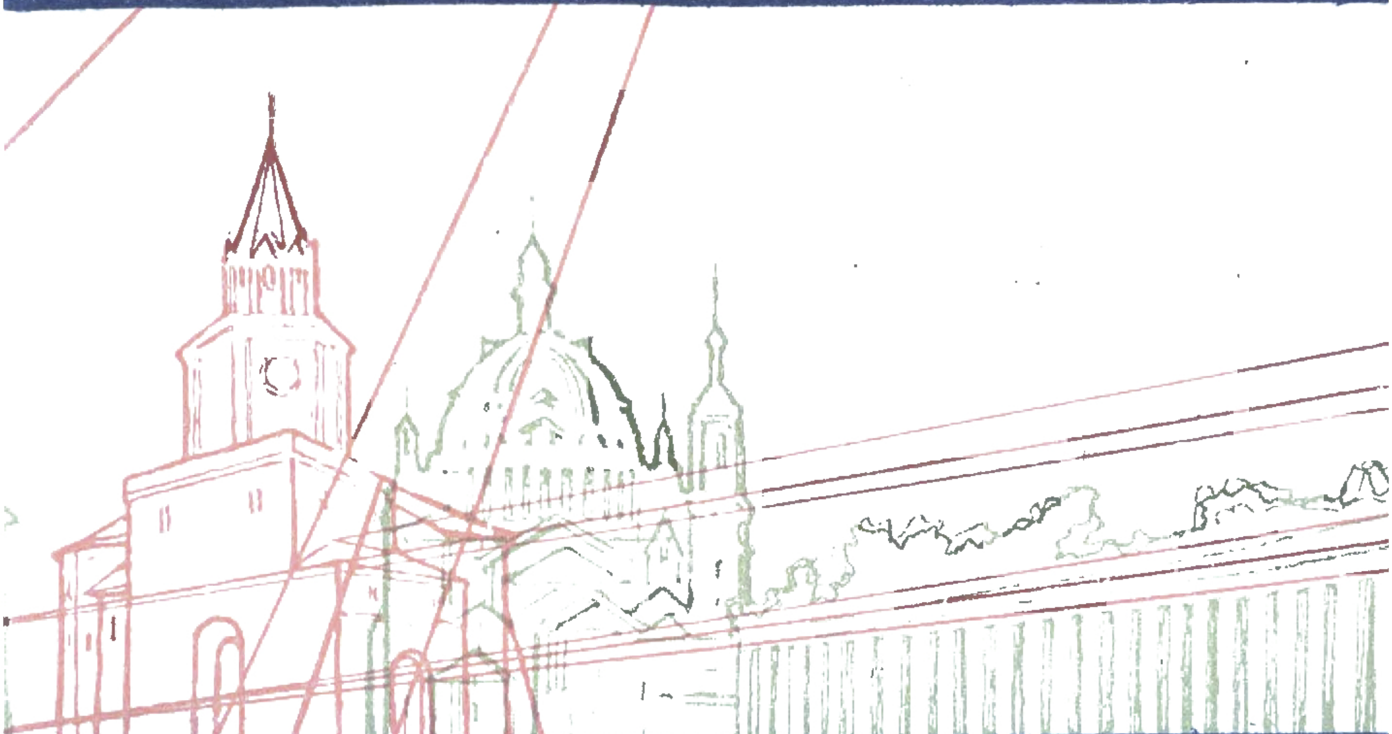
ЖИЗНЬ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ ИДЕЙ

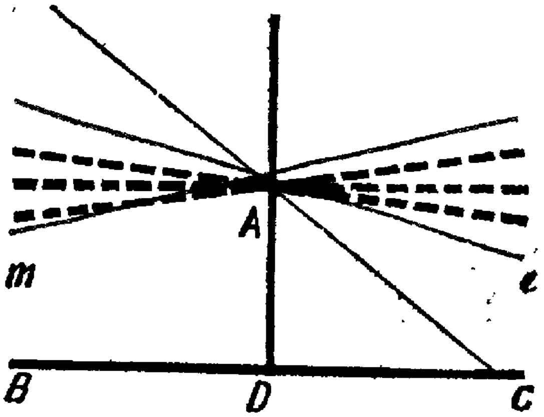


Анна Ливанова

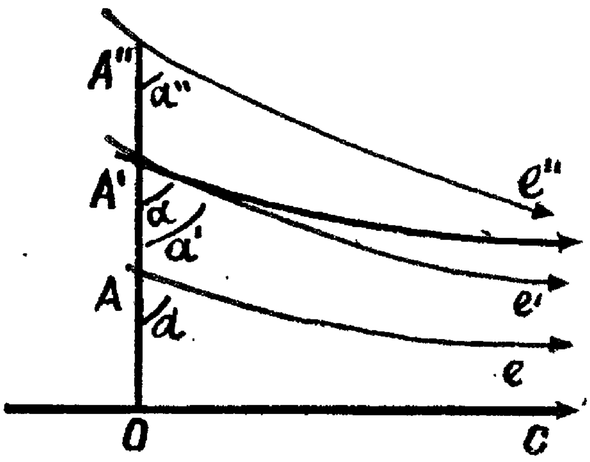
ТРИ СУДЬБЫ
ПОСТИЖЕНИЕ МИРА



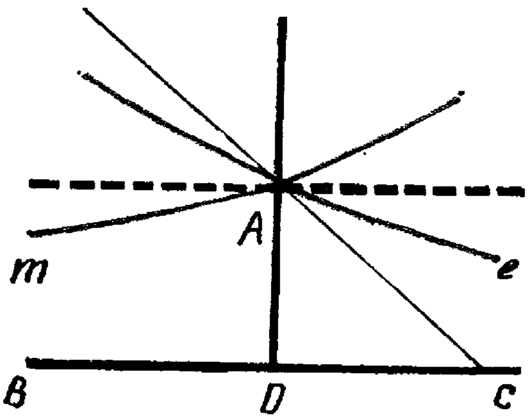
ИЗДАТЕЛЬСТВО «З Н А Н И Е»



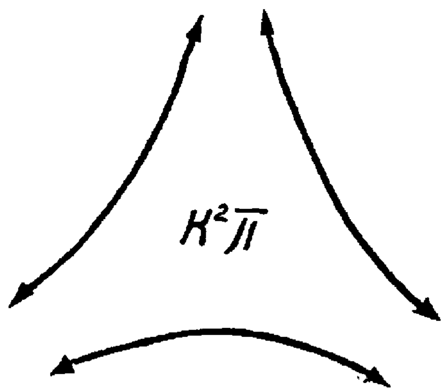
Прямые l и m — первые прямые пучка, не встречающие прямую BC, — Лобачевский называет параллельными ей.



Так выглядит зависимость угла параллельности от длины перпендикуляра или связь между углом и стороной. Когда длина перпендикуляра стремится к бесконечности, угол параллельности стремится к нулю.



Прямые l и m можно изобразить в виде искривленных линий. Тогда легче представить, что они действительно нигде не встретятся с прямой BC.



Предельный случай — так называемый нулевой треугольник. Все три стороны его имеют бесконечную длину и все три угла поэтому равны нулю. $K^2\pi$ — его площадь. К — постоянная пространства Лобачевского, или радиус кривизны этого пространства.

ПАМЯТИ
ИВАНА ИВАНОВИЧА
ЗЕЛЕНЦОВА
ЛЮБИМОГО,
НЕЗАБВЕННОГО УЧИТЕЛЯ
ПОСВЯЩАЮ

ЖИЗНЬ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ ИДЕЙ

ВЫПУСК 2

АННА ЛИВАНОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ЗНАНИЕ»

ЖИЗНЬ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ ИДЕЙ

ТРИ СУДЬБЫ
ПОСТИЖЕНИЕ МИРА

Москва 1969

5(09)
Л55

2—1
6—68

ТРИ СУДЬБЫ

ПЯТЫЙ ПОСТУЛАТ

Отец и сын

Как-то в прозрачное осеннее утро 1796 года по тихим улочкам Геттингена бродили двое студентов. Один из них был уроженец соседнего Брауншвейга Карл Фридрих Гаусс, другой — венгр из Трансильвании Фаркаш, а на немецкий лад Вольфганг Бóяи.

Тогда в «Германии туманной» прогулки чуть свет или под звездами мало кого могли удивить, то был стиль и быт питомцев университета. Но эти двое искали уединения не только ради традиции.

Математика! Едва ли что-нибудь другое на свете больше занимало их мысли. Оба друга, порывистый, экзальтированный Бояи и сдержанный Гаусс, верили, что они внесут свой вклад, может и не малый, в науку. Молодости свойственно и мечтать, и увлекаться, и переоценивать свои силы. Но тут на самом деле были недюжинные силы, ждущие выхода, был талант. Нерешенные задачи прошлого, веками занимавшие математиков, не могли не будоражить их юные головы. И уж конечно, они снова и снова возвращались к пятому постулату Эвклида, этому камню преткновения геометрии, вот уже две тысячи лет лежащему на ее пути.

Минувшей ночью Фаркаша осенила новая идея. Ему показалось, что он придумал, как, наконец, разгрызть этот орешек — постулат о параллельных. Бояи пораньше разбудил Гаусса, вытащил его из постели и увлек за собой.

Они шли, забыв обо всем на свете. Возбужденный Фаркаш то рисовал на земле геометрические фигуры.

задевая палкой прохожих, то мелом исчерчивал стены домов, не заканчивая одной мысли, перескакивал на другую, но чуткий ум Гаусса схватывал все на лету.

— Я назову это «Геттингенской теорией параллельных линий»! — воскликнул Фаркаш.

— Вы гений, вы мой друг...— тихо и проникновенно ответил Гаусс.

— «Ты, ты»! Разве мы не братья, Гаусс, разве мы не друзья на всю жизнь!

...Кончились годы учения, пришло время расставаться. Гаусс уехал домой, в Брауншвейг, а Фаркаш задержался в Геттингене. Не по доброй воле. Как это ни странно звучит, он был оставлен в залог. Получилось так, что Шимон Кемени, юный отпрыск богатого трансильванского барона, неумеренно тратил отпущенные отцом деньги и к окончанию университета кругом задолжал. А кому же расплачиваться за это, как не Фаркашу Бояи? Ведь его, сына обедневшего дворянина, еще в детстве взяли в семью барона для совместных занятий с Шимоном; он стал спутником молодого Кемени при поездке в Германию, вместе с ним учился и окончил университет.

И вот молодой барон уехал, а Фаркаш остался заложником.

Чтобы выручить друга, Шимон Кемени нашел простой выход:

«Дайте мне четыреста рейнских форинтов, чтобы я мог вытащить Фаркаша из болота. Я обещаю вам выплатить все это в течение двух лет», — написал он старику Бояи.

Потом Шимон, видимо, вспомнил, что семья Фаркаша очень бедна и вряд ли располагает такой суммой, и дал блестящий совет: «У вас есть земельная собственность, продайте кусок земли».

Странно только, что юному барону не пришло в голову продать хоть клочок своих огромных владений.

В конце концов Фаркаш был отпущен домой. Пешком, без денег возвращался он в Трансильванию. Ему предстояло перевалить через Гарц, пересечь Германию с севера на юг, а это значило пройти десятки королевств и княжеств с запертыми границами, миновать Австрию и в самой Венгрии дойти до ее юго-восточной окраины. Мысленно представляя себе весь этот долгий путь, Фаркаш с каждым днем удлинял переходы. Только изредка останавливался он отдохнуть в придорожных трактирах.

Неспокойна была дорога. Вдоль нее ползли тревожные слухи, разговоры о войне. Немногим больше года прошло с тех пор, как Австрия заключила с Наполеоном Кампоформийский мир. А теперь Англия создала вторую коалицию, и вот-вот опять грянет война.

Чем дальше на юг продвигался Фаркаш, тем напряженней становилась атмосфера. Вена полна была воспоминаний о недавних событиях; она не успела еще оправиться от смятения, охватившего ее, когда Наполеон перешел через Альпы и готовился вступить в город. Об этом говорили все, и все по-разному относились к событиям. Фаркаш то и дело вмешивался в споры. Он воспламенялся от любого сказанного ему наперекор слова и готов был сразу лезть в драку. «Я огонь, я пламя», — сказал он как-то о себе. Но даже частые путевые приключения и перемена мест не очень отвлекали его все от тех же мыслей — о Геттингене, о Гауссе, о математике.

На границе Трансильвании Фаркаша ждала коляска: хоть это догадался сделать для него Шимон Кемени. Так, уже основательно сбив башмаки, Фаркаш последнюю, пятую часть своего пути ехал барином. Кучер довез его до Колошвара, где жили Кемени.

В те времена Колошвар был небольшой город с двенадцатитысячным населением. И хотя он заслуженно носил негласный, но громкий титул центра культуры Трансильвании, средоточия ее интеллигенции, все же духовная жизнь там едва теплилась. Молодой талантливый математик Фаркаш Бояи, окончивший один из лучших университетов Европы, снова вынужден был поступить воспитателем к тому же барону Кемени: найти лучшее применение своим способностям он не мог.

Впрочем, Фаркаш не унывал. Он с удовольствием поселился в Колошваре, бывал в обществе, много развлекался, и даже наука на какое-то время отошла на задний план. Но привязанность к Гауссу не ослабевала.

Верный привычке обо всем рассказывать другу, Фаркаш подробно пишет Гауссу о том, что его окружает, — о Колошваре, о тамошнем обществе, о семье Кемени. Однажды в Брауншвейг полетело письмо о знаменательной встрече...

На масленице 1800 года Фаркаш познакомился с восемнадцатилетней девушкой, дочерью местного хирурга Сусанной Бенке, и полюбил ее. «Сердце захватило королевский трон, принадлежащий мозгу, — в обычном своем стиле писал Фаркаш. — Моя невеста не красавица, но она удивительно привлекательна, умна, благородна, очень музыкальна».

Фаркаш стал мужем Сусанны Бенке. Однако счастье молодой четы скоро омрачилось. У Сусанны начались острые приступы тяжелой наследственной истерии. «Будущее окутано черными тучами, и уже слышны первые раскаты грома», — через год после свадьбы написал Фаркаш Гауссу.

Но вот 15 декабря 1802 года родился сын. В Германию снова полетели восторженные письма.

«Это, слава богу, здоровый, очень красивый ребенок, с тонкими чертами лица, черными волосами и ресницами и горящими темно-синими глазами, которые играют как два бриллианта».

И через год: «Наш сын — чудесный мальчик. Он как луч света в ночи нашей души».

Горячий последователь Руссо, Фаркаш хотел, чтобы детство Яноша протекало среди природы. У Бояи было небольшое наследственное имение Домальд близ города Марошвашархея. Дикая красота местности, изрезанной скалами, заросшей лесами, казалось, как нельзя более отвечала замыслам Фаркаша. Недалеко от дома протекал бурливый, извилистый ручей, который Бояи сам отвел из соседней долины. Вода падала со скалы на скалу. У одного из маленьких водопадов Фаркаш построил хижину, вся обстановка которой состояла из каменного стола да двух скамеек. Они с женой часто приходили сюда, захватив хлеба, овощей и бутылку местного вина. Родители мечтали, чтобы Янош всегда делил с ними это уединение.

В день рождения сына Фаркаш посадил у старого дома несколько берез: они должны были расти вместе с Яношем.

Однако мальчик прожил в деревне лишь немногим более года. Весной 1804 года семья переехала в Марошвашархей, где Фаркаш Бояи получил, наконец, в местной коллегии кафедру математики, физики и химии.

Марошвашархей был маленьким торговым городком, о чем говорило само его имя — Ярмарка на реке Марош. Жизнь там шла медленно и однообразно, почти не меняясь с течением столетий. На узких улочках, застроенных большей частью двухэтажными домами с островерхими крышами, царила тишина, нарушаемая лишь цоканьем копыт да звоном церковных колоколов. Но не в этом была прелесть Марошвашархея. Стоило подняться крутыми переулками на один из высоких холмов города, откуда открывались бескрайные леса, гордые зеленые трансильванские горы, голубая дуга Мароша, как душу охватывало волнение, всегда вызываемое истинной красотой и чувством простора.

Где-то далеко внизу, и справа и слева, мелькали, звали к себе огоньки поселков свободолюбивых горцев, обитавших здесь с незапамятных времен...

И в городе Фаркаш постарался создать для мальчика обстановку близости к природе. Сразу за маленьким домиком начинался сад. Фруктовые деревья сменялись лесом густолистых тополей.

Отец хотел, чтобы Янош как можно позже научился читать и писать, как можно дольше не соприкасался с «цивилизацией». Страстный садовод, Фаркаш сумел увлечь и сына работой в саду. Но ненадолго. Очень скоро Фаркаш столкнулся с такой неуемной жаждой знания, овладевшей маленьким Яношем, что вынужден был отступить. Теперь он только и делал, что отвечал на бесконечные вопросы сына.

Ощущение пространства, образы геометрических фигур — эти отвлеченные математические представления проникли в сознание мальчика уже в такие ранние годы жизни, когда обычно мир ребенка составляют лишь окружающие его люди да находящиеся рядом осязаемые предметы.

— Когда мне было около трех лет, — вспоминал Янош, — я услышал без подробных объяснений, что мир, под которым я понимал только землю, не имеет конца. Я представил себе, что земля, как в глубину, уходит в бесконечность, и если бы она имела край, то за ним должна была бы идти бесконечная пропасть, бездна, иными словами — пустота. Таким образом, я уже тогда составил себе какое-то представление о пространстве.

Развитие мальчика и особенно его геометрической интуиции шло вперед семимильными шагами. Полный гордости отец сообщал Гауссу, что пятилетний Янош, играя, запомнил геометрические фигуры и научился различать созвездия. Однажды за городом, увидев Юпитер, он сказал, что звезда находится очень далеко, потому что и в городе она видна на том же месте неба.

Трудно поверить, чтобы у пятилетнего ребенка были так развиты и чувство пространства, расстояния и способность логически мыслить.

Фаркаш хорошо помнил свое детство, помнил, как очень рано проявилось его собственное математическое дарование, но все же успехи сына изумляли, даже пугали его. К тринадцати годам Янош по своим знаниям не уступал студентам университета. Мальчик изучил планиметрию, стереометрию, тригонометрию и теорию конических сечений, с увлечением занимался дифференциальным и интегральным исчислением, легко и правильно производя сложные выкладки.

Незаметно Бояи прошел с сыном первые шесть книг Эвклида. Он старался не обращать внимание Яноша на постулат о параллельных. Зная страстный и увлекающийся характер мальчика, Фаркаш был уверен, что тот пустится в поиски решения задачи. Сам безрезультатно потратив многие годы на доказательство пятого постулата, он хотел по крайней мере сына уберечь от этого опасного соблазна. Но однажды, забывшись, Фаркаш воскликнул:

— Тот, кто найдет доказательство аксиомы о параллельных, заслужит бриллиант величиной с земной шар!

Янош промолчал. Слова отца, однако, запали ему в душу.

Янош жил все время своей внутренней напряженной жизнью, неведомой окружающим. Эта скрытая внутренняя жизнь прорывалась то приступами мрачной меланхолии, то взрывами бурного веселья, не вызванными, казалось, никакими причинами. Мальчик без удержу носился по лесу, с проворством обезьяны влезал на деревья, добирался до птичьих гнезд и бесстрашно повисал на тонких ветках, а через минуту забивался в укромный угол и часами неподвижно сидел там, сдвинув брови, пряча лицо в ладони, не желая никого видеть, не отвечая на вопросы. Такие странности Яноша ставили в тупик и страшили его родителей.

Отец с сыном были не схожи между собой во всем — кроме любви к математике. Фаркаш — общительный, восторженный, сентиментальный, любитель поэзии и возвышенных слов, человек меняющихся интересов и увлечений. Янош поэзии не любил и никогда не понимал. Все бури, а бури редко утихали в его душе, выражал он в музыке.

Мцыри «знал одной лишь думы власть, одну, но пламенную страсть», — вот так же пламенны были страсти Яноша, которые он пронес через всю жизнь: математика и музыка. Эти страсти были активны, они требовали выхода в творчестве.

В детстве Янош, конечно, был еще не в силах создавать что-нибудь свое в науке, в ту пору он мог только учиться. И стремление все время постигать новое никогда не оставляло мальчика. «Он прыгал передо мной, как чертенок, и без конца требовал, чтобы я с ним занимался», — писал Бояи Гауссу.

Зато способность к музыкальному творчеству проявилась в Яноше очень рано. В десять лет он уже сочинял музыку, а через два года играл вторую скрипку в театре. В городе рассказывали о любопытном происшествии: однажды в зале сидел слепой композитор, автор исполнявшейся оперы; он все время недовольно морщился; вдруг у первой скрипки порвалась струна, и Янош, взяв ноты, начал с блеском исполнять партию первой скрипки. Лицо композитора прояснилось, он поднялся с места и воскликнул:

— Браво, теперь доминирует первая!

Играть в оркестре и писать музыку Янош скоро перестал, но скрипка на всю жизнь сделалась его неизменной спутницей, его утешением и отдыхом.

Несмотря на различие характеров, отец с сыном жили дружно и очень любили друг друга. Яноша с детства отличало требовательное чувство правды и справедливости, и это невольно действовало на его родных, временами даже незаметно подчиняло их влиянию мальчика. Родителей не оставляло ощущение, что в этом ребенке, в их сыне, накапливаются большие силы, зреют серьезные мысли и решения... Захваченный глубоким интересом мальчика к знаниям, Фаркаш много и с удовольствием занимался с ним.

Когда Янош уставал, они откладывали книги, и отец принимался рассказывать о своей жизни. Чаще всего вспоминал он юность, Геттингенский университет, дружбу с Гауссом. О Гауссе Фаркаш мог говорить часами, с упоением, в той возвышенной, экзальтированной манере, которая всегда была ему свойственна.

— Он был скромным. Ты знаешь, можно было провести с ним рядом многие годы и не узнать его величия. Мне жаль, что эту молчаливую книгу без титула я сам не сумел открыть и не смог прочитать. Я не подозревал, как много он знает, пока он первый не открыл во мне моего призвания и не заговорил о близких нам обоим предметах. Нас связала настоящая, а не поверхностная страсть к математике и наше нравственное единомыслие. Часто, находясь вместе, мы могли молчать часами, занятые одними и теми же думами.

Рассказывая, Фаркаш смотрел в окно — и казалось, вместо холмов Марошвашархея, круглых луковок церковных куполов и острых готических шпилей над двухэтажными крытыми черепицей домиками он видит здание Георгии-Августы, как называли Геттингенский университет, да улочки, спускающиеся к берегу Лейне, — любимое место прогулок студентов.

— Однажды мы вдвоем отправились пешком к родителям Гаусса в Брауншвейг. Когда Карл вышел в другую комнату, его мать спросила меня, получится ли что-нибудь из ее сына. Я ответил: «Первый математик Европы». У старой женщины потекли слезы. И я оказался прав, мой мальчик! — с торжеством воскликнул Фаркаш.

Вздохнув, отец продолжал:

— Расставаясь, в минуту прощания мы обменялись трубками и поклялись в последний день каждого месяца устраивать «праздник дружбы»: вечером в один и тот же час выкуривать по трубке в честь друга. Я помню первую весточку от Гаусса: «Твое письмо мне принесли вечером, как раз когда я сел, чтобы начать праздник нашей дружбы. Я сижу в своем кресле, зажигаю трубку и мечтаю о тебе...»

Фаркаш уходил в воспоминания и забывал, что рядом с ним сын, который, затаив дыхание, слушает его рассказы.

— А я мечтал о том, чтобы наши жизненные пути до конца шли рядом. Знаешь, — вдруг живо перебил себя Фаркаш, — ведь мы увиделись еще раз перед разлукой. Когда я возвращался домой, в Трансильванию, мы встретились в Гарце. В тот вечер мы выкурили наши трубки, сидя рядом. Было холодно, снег покрыл вершины гор, окутал леса и скалы. А мы сидели, курили и от чувств, переполнявших наши сердца, не могли вымолвить ни слова.

Фаркаш опустил голову и надолго замолчал.

Рассказы о Гауссе неизменно заканчивались одними и теми же словами:

— Ты вырастешь, мой мальчик, окончишь гимназию и поедешь к нему. Ты будешь учеником лучшего математика мира!

Так Гаусс прочно вошел в жизнь маленькой семьи. Когда все отчетливее стало проявляться математическое дарование Яноша, с именем Гаусса связывались все надежды, все будущее. Не преувеличивая, можно сказать, что в доме царил культ Гаусса. Его называли не иначе, как «Геттингенский Колосс». В этой атмосфере преклонения перед Гауссом рос и воспитывался Янош.

Мальчик подрастал, внутренне подготавливая себя к встрече с великим математиком, со все усиливающимся нетерпением ожидая этой минуты.

Когда Яношу пошел шестнадцатый год и он окончил гимназию, настало время серьезно и безотлагательно решать вопрос о его дальнейшей судьбе. Фаркаш сел за письмо Гауссу. Он просил старого друга взять Яноша в свою семью и самому заняться его образованием. «Твое время и труд не пропадут даром — тому порукой дарование Яноша и его горячий интерес к математике», — писал Фаркаш. Он откровенно признавался, что боится отпускать мальчика одного в большой город, где нет никого из близких, и что он не сможет обеспечить Яноша средствами, необходимыми для самостоятельной жизни вне семьи. Однако расходы, связанные с пребыванием сына у Гаусса, Фаркаш брался оплачивать полностью...

Может быть, Гауссу странным показался в этом письме естественный интерес Фаркаша к обстановке в доме геттингенца. Фаркаш и в самом деле без должного такта осведомлялся даже о том, представляет ли супруга Гаусса «исключение из всего женского пола или нет». Он спрашивал: «Не меняется ли, подобно флюгеру, ее настроение?»

Конечно, едва ли подобные вопросы были приятны Гауссу. Но ведь в прежние времена он и Фаркаш были откровенны друг с другом во всем.

Письмо ушло в Геттинген, где Гаусс уже возглавлял в университете кафедру математики и астрономии. Письмо ушло, и отец с сыном с волнением стали ожидать ответа.

Прошла неделя, другая, третья... С каждым днем становилось все яснее, что почта, которую они обвиняли в нерасторопности, тут ни при чем. Наконец, спустя год, оба поняли, что ждать больше нечего.

...Много горьких слов о Гауссе пришлось услышать отцу от сына. Фаркаш Бояи старался защитить Гаусса, но слова его звучали робко и неубедительно. На этот раз ему изменило обычное красноречие. Про себя он думал: «Неужели Янош прав?!» Впервые за долгую дружбу Гаусс не ответил, и как раз тогда, когда его ответ был необходим. «Как быть?» — тысячи раз спрашивал себя Фаркаш и не находил ответа. Талантливого мальчика надо серьезно учить дальше, а послать его в университет не хватает средств.

— Бедность давит, как свинец, — жаловался Фаркаш друзьям.

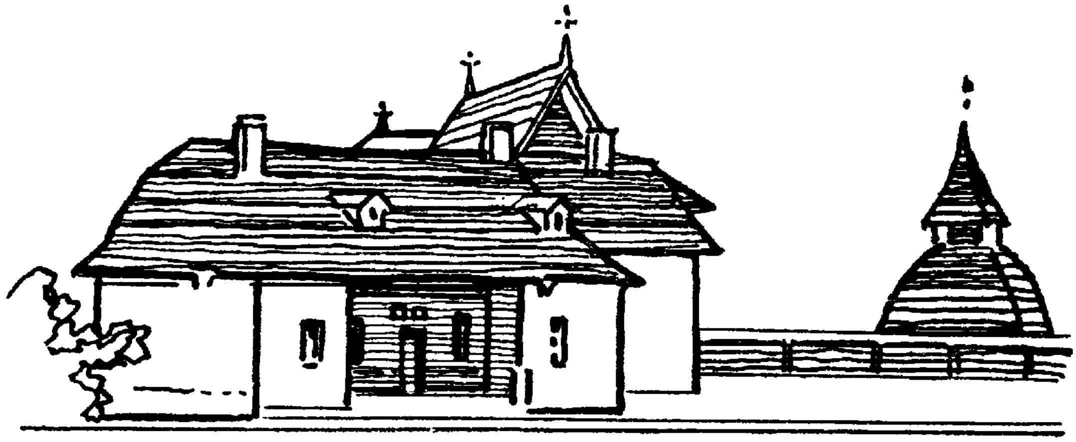
Заподозрить обожаемого Гаусса в чем-то нехорошем старый Бояи не мог. «Случилось нечто непонятное...», — думал он.

Гораздо позже, став взрослым человеком, Янош так объяснял поведение Гаусса:

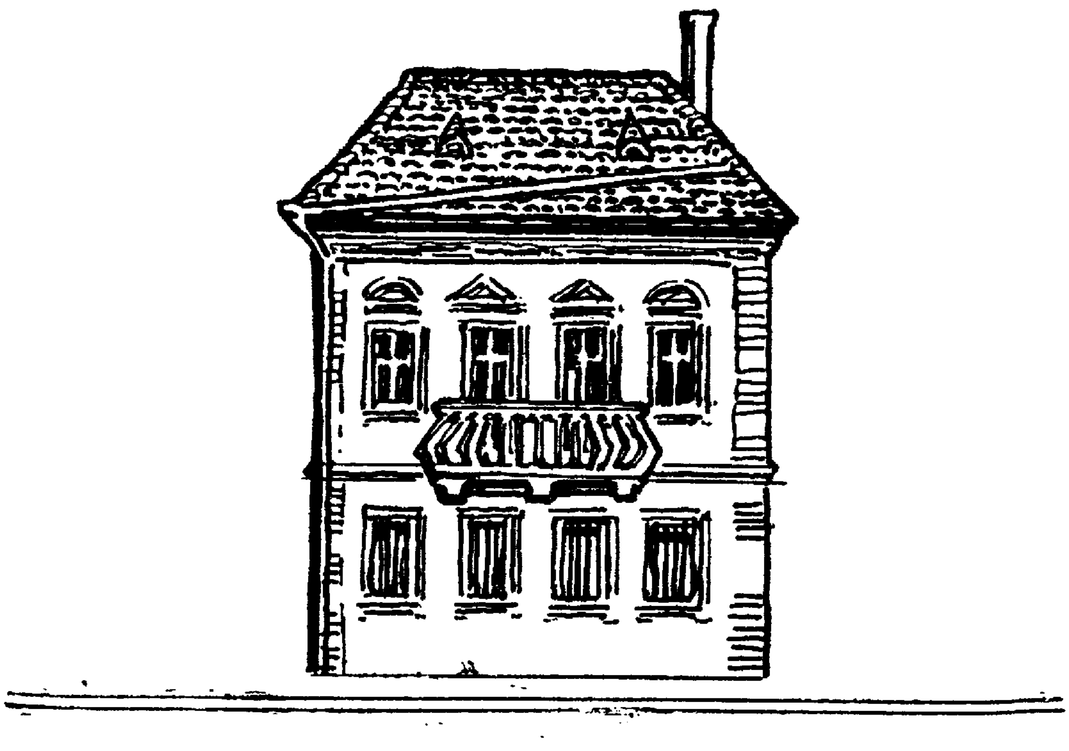
— Наверное, Колосс не захотел выполнить просьбу своего друга, но и побоялся причинить ему боль отказом. Вот почему он отмолчался.

Гаусс не пришел на помощь. После долгих раздумий родители решили послать Яноша в Вену, в Военно-инженерную академию. Они отважились на это, хотя для содержания Яноша в столице империи требовалась сумма, в пять раз превышающая все состояние семьи. Оставалась одна надежда на помощь меценатов. Но и таким путем достать нужные средства было очень труд-

Фаркаш Бояи.



Дом Ф. Бояи в Марошвашархее.



Дом Ф. Бояи в Колошваре.

но. Страна переживала тяжелый кризис: между 1811 и 1816 годами две инфляции вдвое обесценили деньги.

Отец совершал унизительные обходы всех состоятельных жителей Марошвашархея и, наконец, один из них согласился внести плату за обучение Яноша. Это было не просто великодушие. Среди аристократии в те времена существовал обычай посылать за свой счет учиться талантливых, но бедных юношей. Завершив образование, эти юноши должны были или оставаться на государственной службе, или поступать в услужение к той семье, которая их содержала. Так Яношу после академии пришлось много лет отдать ненавистной военной службе. Он с гневом и горечью вспоминал о том унижении, которым заплатил отец за его образование:

— Моему отцу удалось отправить меня учиться на деньги высокомерных магнатов. Эта сумма была для них ничтожна, в тысячу раз меньше той, что они с легкостью проигрывали в карты и тратили на роскошь.

Венская академия давала некоторое математическое образование, но оно было весьма ограниченно. Всю жизнь Янош ощущал неполноценность своих знаний. Он оказался в стороне от главного русла математики века, с ее проблемами и методами. Почти через сорок лет, в 1856 году, уже после смерти Фаркаша, он писал: «При том таланте, который отец во мне открыл, лучше было бы оставить меня дома при себе и самому заниматься моим воспитанием и математическим образованием. Во всяком случае, я, если бы мне выпало счастье иметь такого сына, не отпустил бы его от себя».

Пока Янош жил в Вене, семью постигло большое горе. Летом 1819 года у матери, особенно трудно переживавшей разлуку с сыном, стала обостряться старая болезнь: все чаще повторялись тяжелейшие припадки истерии. «Это не смертельно, но ужаснее смерти, — говорил Фаркаш, — врач боится сумасшествия».

Но врач ошибся, болезнь оказалась смертельной...

Первое время отец всемерно поощрял углубленные занятия Яноша математикой. Он писал сыну:

«Я все больше верю в то, что великим математиком может стать только тот, кто неустанным длительным трудом достигает совершенства.

Годы проходят и ничего не оставляют тому, кто не глядит в будущее с помощью подзорной трубы мудрости и только срывает цветы настоящего; но счастлив тот, кто умеет использовать время и, как дерево, каждый год становится сильнее на одно кольцо».

Но как только Фаркаш узнал, что сын его увлекся теорией параллельных, что она стала любимым занятием Яноша, он пришел в ужас, и в Вену полетели отчаянные письма:

«Ты не должен пытаться одолеть теорию параллельных линий; я знаю этот путь, я проделал его до конца, я прожил эту бесконечную ночь, и весь свет, всю радость моей жизни я там похоронил. Молю тебя, оставь в покое учение о параллельных линиях; ты должен страшиться его, как чувственных увлечений; оно лишит тебя здоровья, досуга, покоя, сно погубит счастье твоей жизни. Этот глубокий, бездонный мрак может поглотить тысячу таких гигантов, как Ньютон; никогда на земле не будет света, и никогда бедный род человеческий не достигнет совершенной истины, не достигнет ее и в геометрии; это ужасная вечная рана в моей душе; да хранит тебя бог от этого увлечения, которое так сильно овладело тобой. Оно лишит тебя радости не только в геометрии, но и во всей земной жизни. Я готов был сделаться мучеником этой истины, чтобы только подарить человечеству геометрию, очищенную от этого пятна; я проделал гигантскую, тяжелейшую работу; я достиг гораздо большего, чем то, что было получено до меня, но совершенного удовлетворения я не получил.

Учись на моем примере; из-за того, что я хотел постичь теорию параллельных линий, я остался безвестным. Это отняло у меня всю мою кровь, все мое время. Здесь зарыт корень всех моих последующих ошибок. Если бы я мог открыть загадку параллельных линий, пусть об этом никто бы не узнал, я стал бы ангелом...

Непостижимо, что в геометрии существует эта непобежденная темнота, этот вечный мрак, туча, пятно на девственной, нетронутой истине... Дальше геркулесовы столпы; ни шагу дальше, или ты погибнешь!»

Неразрешимая задача

В математике есть так называемые «вечные задачи». Таковы три знаменитых геометрических построения, которые надлежит выполнить только с помощью циркуля и линейки: трисекция угла, то есть разделение любого угла на три равные части, удвоение куба и квадратура круга.

...Существует предание: жители древнегреческого острова Делоса жестоко страдали от эпидемии чумы; оракул провозгласил, что если кому-нибудь удастся построить новый алтарь, по объему вдвое больше старого, но сохраняющий форму куба, то остров избавится от мора; оракул потребовал, чтобы при удвоении алтаря циркуль и линейка были единственными инструментами геометров. При таком условии задача оказалась неразрешимой.

В задаче о квадратуре круга, само название которой стало нарицательным, требовалось построить квадрат, равновеликий по площади данному кругу, тоже пользуясь только циркулем и линейкой. Лишь в девятнадцатом веке было доказано, что эта задача, так просто решаемая разными способами, линейке и циркулю неподвластна.

Но самой значительной и в то же время самой роковой из «вечных задач» стала проблема пятого постулата Эвклида.

Что же представляет собой пятый постулат? Почему Фаркаш Бояи так страстно заклинал сына оставить даже попытку разрешить эту задачу? Почему он называл теорию параллельных «бездонной пропастью»?

Что же такое теория параллельных линий, если от высокой патетики устрашающих образов Бояи перейти к сдержанному и точному языку математики?

Рядом с драматическими, полными трагизма судьбами людей, столкнувшихся с загадкой пятого постулата, чисто математическая сторона задачи на первый взгляд может показаться сухой и даже неинтересной.

Однако именно здесь, в дебрях сложных геометрических построений и еле уловимых логических тонкостей, скрывалось зернышко, из которого впоследствии выросло удивительное, прямо фантастическое открытие — такое, что без него были бы просто немыслимы многие замечательные завоевания и современной математики и современной физики.

Основой теории параллельных, ее фундаментом служит пятый постулат Эвклида. Суть его состоит в утверждении, что через точку, лежащую вне данной прямой, можно провести только одну прямую линию, ей параллельную. В формулировке самого Эвклида этот постулат сложнее, чем другие его постулаты. Ему прежде всего недостает их наглядности.

Что это значит?

Напомним истинное геометрическое содержание слова «постулат». Для этого, вероятно, лучше прежде всего посмотреть, как строится сама геометрия — эта царица логических, «выводных» наук. В геометрии, как мы помним со школы, все строго и точно доказывается, выводится одно из другого, более сложное из более простого. Эти доказываемые положения называются теоремами. Так повелось у математиков всех веков и народов — давно, от Аристотеля. Но мудрые греки понимали, что, желая доказать абсолютно все, они не будут в состоянии доказать ничего. Цепочка выводов не может быть бесконечной, она должна где-то начинаться. Эти начальные звенья, самые простые, которые уже нельзя было ни из чего вывести и ничем доказать — но правильность которых неизменно подтверждалась всем опытом человечества — назвали аксиомами и определениями.

Анри Пуанкаре, один из крупнейших математиков конца прошлого и начала нынешнего века, писал: «В *логике из ничего нельзя и вывести ничего*: в каждом доказательстве заключение предполагает известные посылки. Поэтому математические науки должны опираться на известное число положений, не могущих быть доказанными. Может идти речь о том, давать ли этим положениям название *аксиом*, *гипотез* или *постулатов*... но самое существование их несомненно».

Слово «аксиома» греческого происхождения, оно означает «достойный», то есть достойный доверия. Из аксиом и определений и выводится вся построенная по законам логики наука, в частности, геометрия. А постулаты? По своему смыслу постулаты — то же самое, что и аксиомы. Недаром в некоторых изданиях Эвклида пятый постулат называется одиннадцатой аксиомой. Вообще слова эти взаимозаменяемы, и многие математики не видят в них никакого различия. Но, пожалуй, более правильна та точка зрения, что аксиомы Эвклид относил к любым величинам, а постулаты — лишь к геометрическим.

«Постулат» означает «требование». Иными словами, постулаты — это основные требования, или исходные, первоначальные допущения, на которых строится вся геометрия.

Эвклид так и пишет:

«Нужно потребовать:

1. Чтобы от каждой точки к каждой точке можно было провести прямую линию.

2. И чтобы ограниченную прямую можно было непрерывно продолжить по прямой.

3. И чтобы из любого центра любым радиусом можно было описать окружность.

4. И чтобы все прямые углы были друг другу равны.

5. И чтобы всякий раз, как прямая, пересекая две прямые, образует с ними внутренние односторонние углы, составляющие вместе меньше двух прямых, эти прямые при неограниченном продолжении пересекались с той стороны, с которой эти углы составляют меньше двух прямых».

Сразу бросается в глаза, и это не могло не поразить математиков всех столетий, насколько пятый постулат отличается от первых четырех. Он гораздо сложнее их — он скорее похож на теорему, которая нуждается в доказательстве, — и он лишен их наглядности, потому что речь здесь идет о неограниченном продолжении прямых.

Вот, скажем, первый постулат. Он утверждает, что через две точки, близко ли, далеко ли отстоят они друг от друга, всегда можно провести прямую. Это так наглядно, что не вызывает сомнений.

Другое дело — параллельные линии. Как бы далеко ни были прочерчены две параллельные прямые, никогда нельзя проверить, как они себя поведут при бесконечном продолжении. Останутся ли они параллельными? Или, может быть, сойдутся? Или, наоборот, разойдутся? Интуитивно все положения теории параллельных тоже кажутся бесспорными, но интуиция позволяет нам представить лишь ограниченную часть пространства, перед бесконечностью она бессильна. И опыт тоже.

Вероятно, Эвклид понимал, что пятый постулат занимает особое место среди его аксиом. Иначе почему изложение материала в своих книгах он резко разбил на две части? Сначала он рассматривает теоремы, которые можно доказать, не прибегая к помощи пятого постулата. Эта часть теперь носит название **абсолютной геометрии**. Затем сгруппированы все теоремы, которые доказываются только на основе пятого постулата. Эту часть и называют **собственно эвклидовой геометрией**.

Почти с полной достоверностью можно утверждать, что сам Эвклид сначала сформулировал пятый постулат в виде теоремы и долго искал ее доказательство. И лишь неудача, которую он потерпел, заставила его включить непокорную теорему в число постулатов.

Так Эвклид разрубил гордиев узел.

Математики последующих веков не примирились с этим решением Эвклида. Уже одна его формулировка пятого постулата, такая сложная, так напоминающая теорему, заставила их насторожиться.

«Это положение, — писал в V веке нашей эры византийский философ Прокл, — должно быть совершенно изъято из числа постулатов, потому что это теорема, вызывающая много сомнений... Но, может быть, некоторые, вследствие ошибочных воззрений, подумают, что это положение действительно следовало поместить среди постулатов; само по себе оно вызывает доверие... Но у творцов науки мы научились не относиться в геометрических рассуждениях с полным доверием к наглядным представлениям нашего воображения... Конечно, совершенно необходимо признать, что прямые линии наклоняются одна к другой, если прямые углы заменяются острыми. Однако что эти наклонные при продолжении сойдутся, это остается не достоверным, а лишь вероятным, до тех пор, пока этому не будет дано логическое доказательство: ибо существуют бесконечные наклонные линии, которые никогда не сходятся. Что же, в случае прямых линий не может иметь место то, что бывает в случаях других линий? — глубоко проникая в самую суть затруднения, спрашивает Прокл. — До тех пор, пока мы этого не обнаружим путем доказательства, свойства, которые могут проявиться при неограниченном продолжении других линий, тяготеют над нашим воображением».

Какой же выход предлагает Прокл? Доказать, непременно доказать как теорему то, что Эвклид принял за постулат. В том, что это может быть достигнуто, Прокл уверен твердо. Таким образом, Прокл не сомневается в надежности и крепости одного из краеугольных камней эвклидовой геометрии, не отвергает ее основы основ. Он только требует строгого доказательства.

Прошло еще тринадцать столетий, а задача так и не была разрешена.

В конце восемнадцатого века немецкий математик Клюгель, воспитанник знаменитого Геттингенского университета, выступает с диссертацией «Обзор важнейших попыток доказательства теоремы о параллельных линиях».

«Среди истин, которые прилежно изучали выдающиеся умы, — пишет Клюгель, — не последнее место занимает теорема элементарной геометрии о параллельных линиях. Все науки хранят в себе загадочные вещи: не удивительно, что наш ум, заключенный в определенные пределы, многого не постигает, не в состоянии раскрыть источники и причины многих фактов. При всем том я не знаю, больше ли в слабости нашего ума или в характере самых истин коренится вина того, что в пределах геометрии существуют препятствия, которые не дают возможности овладеть подступами к ней в такой степени, как это было бы желательно. Немногочисленны истины, которые в геометрии могут быть доказаны без помощи теоремы о параллельных линиях; но еще малочисленнее те истины, которые можно использовать для ее доказательства. Вследствие этого, не располагая отчетливыми сведениями о прямых и кривых линиях, мы не можем выполнить это доказательство на основе их определения. При этих условиях нельзя поставить геометрии в вину, если она вносит в основные свои положения такое предложение, истинность которого не устанавливается отчетливым рассуждением, а усматривается непосредственно благодаря нашим наглядным представлениям о прямой линии. Таков пятый постулат Эвклида...»

Значит, принять без доказательства, считать постулатом. Вот к чему, в противоположность Проклу, приходит Клюгель через тысячу триста лет. Но это решение вынужденное. Клюгель и не скрывает, что́ его привело к такому выводу:

«Многие, опытные в геометрических доказательствах, пытались устранить эту истину из числа аксиом, но все доказательства, которыми они старались эту истину строго установить, оказались порочными. Другие предлагали заменить ее иными аксиомами, которые, однако, не могут считаться более ясными, нежели постулат Эвклида».

Разобрав около тридцати лучших, на его взгляд, но равно безнадежных способов доказательства пятого постулата, сочувственным взором окинув этот парад отчаяния, Клюгель в конце концов оправдывает позицию Эвклида:

«Таким образом, если обозреть все попытки, то окажется совершенно правильным, что Эвклид поместил это предложение среди аксиом».

А еще пятьдесят лет спустя об этом же пишет и Гаусс. Он не соглашается с Клюгелем. Но и не опровергает его. Он только бесстрастно подводит печальный итог:

«В области математики найдется мало вещей, о которых было бы написано так много, как о пробеле в начале геометрии при обосновании теории параллельных линий. Редко проходит год, в течение которого не появилась бы новая попытка восполнить этот пробел. И все же, если мы хотим говорить честно и открыто, то нужно сказать, что, по существу, за 2000 лет мы не ушли в этом вопросе дальше, чем Эвклид.

Такое откровенное и открытое признание, на наш взгляд, более соответствует достоинству науки, чем тщетные попытки скрыть этот пробел, восполнить который мы не в состоянии бессодержательным сплетением призрачных доказательств».

Да, две тысячи лет! В продолжение двух тысячелетий геометры безуспешно пытались найти то, чего не смог найти сам Эвклид...

Трагические слова Фаркаша Бояи имели достаточно оснований. Стоит только вспомнить, сколько крупнейших талантливых математиков и просто дилетантов, сколько юношей и стариков отдали все время, а иные и всю жизнь бесплодным попыткам доказать постулат о параллельных! Сколько даровитых геометров бесцельно растратили свои силы, сколько из них впали в отчаяние и потеряли рассудок из-за неудавшихся попыток «очистить Эвклида от этого пятна», как выразился итальянский математик семнадцатого века, монах-францисканец Иероним Саккери!

Стремление доказать пятый постулат можно сравнить только с исступленным желанием найти «философский камень» в средние века или с бесчисленными попытками создать «вечный двигатель».

Конечно, выражение «доказать постулат» содержит в себе внутреннюю бессмыслицу. Потому что по самому своему смыслу и содержанию постулат — это утверждение или требование, которое не требует доказательства, не нуждается в нем и не может его иметь. Доказывать можно лишь теоремы. Это отлично знали все те математики, которые тем не менее искали такое доказательство. То, что они пытались его все-таки найти, говорит лишь об одном — они, осознанно или бессознательно, считали пятый постулат не аксиомой, а теоремой — положением, нуждающимся в доказательстве.

Таким образом, все они действовали обратно тому, как действовал Эвклид. Вероятно, Эвклид сделал это «не от хорошей жизни». Но оказывается, как мы теперь знаем, его решение было единственно правильным — решение поместить этот камень преткновения геометрии среди постулатов, а не теорем. Действовала ли тут гениальная интуиция? Вряд ли. Все, что известно, говорит за то, что Эвклид поступил так просто потому, что ему не удалось поступить иначе. Его собственные попытки доказать свойство параллельных линий не пересекаться при их продолжении тоже, естественно, потерпели неудачу.

В поисках доказательств пятого постулата математики различных стран и эпох нашли для него ряд новых выражений. Появилось много формулировок постулата, на первый взгляд совершенно различных, а по существу означающих одно и то же, но сказанное каждый раз иными словами. Первая принадлежит самому Эвклиду. Другую, простейшую из них, мы тоже уже приводили. Третья гласит, что сумма углов любого плоского треугольника равна двум прямым углам, или 180°. Четвертая состоит в утверждении, что существуют подобные фигуры. Примеры формулировок можно продолжить.

Авторам этих выражений казалось, что в таком, ими найденном виде постулат о параллельных, может быть, удастся победить. Увы!

Каждый раз в любом доказательстве обнаруживалась какая-нибудь, иногда очень тонкая, почти неуловимая ошибка; или же оказывалось, что в рассуждении негласно присутствует предположение, которое есть не что иное, как другая форма того же постулата. То, что изгонялось через дверь, лезло в окно; то, что требовалось доказать, в замаскированном виде бралось за исходное. Самые разнообразные доказательства проваливались одно за другим.

Наиболее зрелые геометры понимали, что если любую из формулировок принять за исходную — за постулат, все остальные немедленно доказываются как теоремы. Так, из утверждения, что сумма углов треугольника равна 180°, следует и то, что через точку вне прямой можно провести единственную параллельную ей прямую, и то, что существуют подобные фигуры...

Суть задачи, столетия занимавшей умы математиков, состояла в том, что надо было доказать одну из этих теорем, не прибегая ни прямо, ни косвенно к помощи пятого постулата. Тогда был бы доказан и сам пятый постулат; ведь мы только что говорили, что все эти теоремы представляют собой лишь различные его формулировки.

Многие математики в разные века пытались доказать без помощи теории параллельных, что сумма углов треугольника равна двум прямым углам (180°). При этом они обычно пользовались весьма употребительным в логике методом доказательства от противного — или приведения к абсурду: сначала выдвигается положение, обратное тому, которое требуется доказать, а потом цепью рассуждений приходят к противоречию; и тогда становится ясным, что выдвинутое положение было ложным, а истинно — обратное ему.

Таким путем пошел и Иероним Саккери. Он хотел опровергнуть оба возможных предположения: и то, что сумма углов треугольника больше 180° («гипотеза тупого угла»), и то, что она меньше 180° («гипотеза острого угла»). Сравнительно легко и быстро ему удалось сделать это для «гипотезы тупого угла»; она действительно привела к абсурду — к противоречию со всеми остальными постулатами Эвклида. Но долгие месяцы провел Саккери взаперти в своей келье, безуспешно пытаясь найти опровержение «гипотезы острого угла». В своем сочинении «Эвклид, очищенный от всякого пятна, или опыт, устанавливающий самые первые принципы универсальной геометрии» Саккери развил цепь безупречных и тонких рассуждений. Но внезапно в одной из теорем он просто заявил, что гипотеза острого угла совершенно ложна, ибо она противоречит природе прямых линий. Саккери сам почувствовал, что такое произвольное утверждение не есть доказательство. В примечании к этой теореме он написал: «На этом я мог бы спокойно остановиться, но я не хочу отказаться от попытки доказать, что эта упрямая гипотеза острого угла, которую я уже вырвал с корнем, противоречит самой себе». И он снова и снова, все так же безуспешно, принимался за разрешение неразрешимой задачи.

Потерпел неудачу и Фаркаш Бояи со своей «Геттингенской теорией параллельных линий», о замысле которой еще юношей он рассказал Гауссу. Он допустил в доказательстве одну элементарную ошибку, которую его великий друг незамедлительно обнаружил.

«Я не был удовлетворен моими попытками доказать аксиому о параллельных, — писал Фаркаш. — И хотя я до конца исследовал все возможности, после многих лет труда я все-таки не нашел покоя. И тогда огонь моей любви к математике погас, и я занялся поэзией».

Огонь любви погас, но осталась «вечная рана», и он говорил сыну, как надломила его эта неудача:

— Если бы мне тогда посчастливилось, я был бы совсем другим человеком!.. Если человек счастлив, то ему легче сделать других счастливыми. Что может дать источник, в котором нет влаги? Не трать на это ни часа. Ты не получишь никакой награды, но загубишь всю жизнь. Сотни великих математиков в продолжение столетий ломали себе голову над этим. Я думаю, что все мыслимые идеи уже использованы... Если бы Гаусс, — призывал Фаркаш на помощь непоколебимый авторитет геттингенца, — тоже посвятил свое время бесплодным мыслям об этой аксиоме, то его учение о многогранниках и все его другие работы не появились бы на свет. Я могу засвидетельствовать, что он едва не свихнулся на теории параллельных. Он заявлял устно и письменно, что долгие годы бесплодно размышлял об этом.

Но заклинания отца не сдержали Яноша.

— Это настойчивое и энергичное предупреждение, которое должно было лишить меня мужества, не напугало меня. Оно только повысило мой интерес к задаче, усилило мою энергию и желание насколько возможно овладеть предметом. Любой ценой захотел я вторгнуться в загадку параллельных и разрешить ее! — говорил Янош.

Янош Бояи выбирает свой путь

Мышление и творчество гениев развиваются по особым, наверное, и им самим неведомым путям; поток творческой энергии таких людей часто не могут задержать никакие внешние препятствия, никакие перипетии жизненной судьбы.

Янош Бояи начал с того же старта, что и многие другие математики, — с попыток доказать пятый постулат от противного. Нам неизвестно, как долго отдавал он дань этим усилиям и когда запали ему в голову семена новых идей. Может быть, еще в Вене появились у него сомнения в самой возможности доказательства постулата параллельных, хотя тогда он еще никому об этом не говорил.

По окончании академии Янош должен был служить в гарнизоне крепости близ Темешвара. Осенью 1823 года младший лейтенант Бояи отправился к месту службы. По дороге он остановился в Марошвашархее, чтобы повидаться с отцом. Встреча была короткой и нежной — первая их встреча после смерти матери. Оба словно сговорились не упоминать ни о чем, что могло бы вызвать споры и размолвки, и старались сдерживать свои неуравновешенные характеры.

Когда Янош уехал, отец восторженно рассказывал одному своему другу:

— Мой сын — высокий, сильный, красивый юноша, в котором храбрость солдата сочетается с застенчивостью невинности. Он не картежник, не пьет ни вина, ни водки, ни кофе, не курит и не нюхает табака. Совсем мальчик — он еще не бреется, у него только пробивается пушок. Однако, поверь, он уже выдающийся математик, истинный гений и блестящий скрипач...

Фаркашу даже казалось, что сын его стал выдержаннее и спокойнее. Но отец ошибался. Вспыльчивость Яноша оставалась по-прежнему неукротимой и часто приводила к ссорам с окружающими. Может быть, причины этих ссор крылись в том обостренном чувстве справедливости и правды, которое, как мы уже знаем, с детских лет не позволяло ему терпеть ни лжи, ни лицемерия, ни насилия. А жизнь все чаще сталкивала его со всем этим.

Однажды в Темешваре он получил в один и тот же день тринадцать вызовов на дуэль. Все вызовы он принял, но поставил условие: после каждых двух дуэлей ему предоставлялось право отдохнуть, играя на скрипке... Конечно, он играл своего любимого Паганини — все его каприччио, одно за другим! Страстная и тонкая музыка Паганини звучала в унисон с чувствами молодого Бояи, а ее фантастическая виртуозность не только не утомляла руку Яноша, а казалось, лишь усиливала гибкость этой руки, сменявшей смычок на рапиру.

Он победил в тот день всех противников.

В Темешваре Янош начал особенно серьезно и много заниматься теорией параллельных.

«Милый, хороший отец! Мне так много надо рассказать о моем новом открытии...— писал он в ноябре 1823 года в Марошвашархей. — У меня теперь есть твердое намерение издать сочинение о параллельных линиях, если только мне удастся довести исследование до конца. Главное мною еще не найдено, однако путь, которым я иду, почти наверняка обещает достижение цели, если это вообще возможно. Пока цель еще не достигнута, но я уже обнаружил такие выдающиеся вещи, что сам поражен. Пришлось бы вечно сожалеть, если бы эти открытия оказались утраченными. Когда, дорогой отец, Вы увидите мою работу, Вы должны будете это признать. Сейчас я не прибавлю больше ни слова — скажу только, что из ничего я создал новый особенный мир. Все наброски, которые я посылал Вам до сих пор, в сравнении с этим — не более чем карточный домик рядом с каменной башней...»

Читая это взволнованное, торопливое письмо, представляешь скульптора, еще не создавшего статуи, но уже ощущающего линии прекрасного тела, притаившегося в мраморе. Их еще не видит никто. Но тверда рука, держащая резец, она не ошибется; уверенны глаза, потрясенные внутренним ви́дением совершенства... «Путь, которым я иду, почти наверняка обещает достижение цели... из ничего я создал новый мир».

Янош не мог больше оставаться наедине со своим открытием. Конечно, только отец сможет сразу все понять: у него старые счеты с неприступным постулатом И потом он ведь с такой надеждой следил за развитием математических дарований сына.

А может быть, к этим размышлениям Яноша примешивался еще и вызов, который иногда, пусть бессознательно, любит бросать молодость: смотри, отец, ты заклинал меня оставить это занятие, тебя сломили бесплодные поиски, увели от счастья, лишили покоя, а теперь параллельные линии побеждены мною! Я еще не построил законченного здания, но, видишь — уже уверен в успехе.

Странно, однако, что письмо сына оставило спокойным так легко загорающегося Фаркаша. Он не стал особенно любопытствовать относительно существа открытия. Он только пообещал Яношу присоединить его будущую работу к своему обширному учебнику — «Опыт введения учащегося юношества в начала чистой математики», или сокращенно «Тентамен»*, который Фаркаш писал уже около двадцати лет.

Кроме того, он давал Яношу несколько практических советов:

«...если действительно удалось кое-что доказать, то полезно поспешить с опубликованием: во-первых, потому, что идеи легко переходят от одного лица к другому и кто-нибудь может сообщить о них в печати первым; во-вторых, потому — и в этом есть известная доля истины, — что для некоторых вещей существуют эпохи, когда они появляются одновременно во многих местах,

---

* Tentamen — опыт (лат.).

совершенно как фиалки, которые ранней весной выходят на свет отовсюду».

Если бы на этом и остановился измученный неудачами отец! Но дальше шли слова несправедливые, опасные, которых не надо было писать.

«...И так как всякое научное соревнование представляет собой лишь большую войну, — продолжал Фаркаш Бояи,— за которой неизвестно когда последует мир, то надо, если возможно, быть победителем, потому что преимущество достается первому».

Большой войны не было. Можно только пожалеть, что те, кто, по мнению Фаркаша, стали бы неизбежными противниками, никогда не встретились... Но слова Бояи о фиалках оказались пророческими.

11 февраля 1826 года

Янош Бояи только еще строил свой «новый мир», когда на другом конце Европы, в глубинной России, в полуевропейской, полуазиатской Казани, молодой профессор университета Николай Иванович Лобачевский уже готовился сообщить о созданной им новой геометрии. Построенная на отрицании пятого постулата Эвклида, она расходилась со всеми привычными представлениями о пространстве.

Заседание Совета университета было назначено на 11 февраля. День выдался вьюжный, сумрачный. В зале пришлось зажечь свечи.

Лобачевский стремительно взошел на кафедру, поправил густые, вечно спутанные волосы и уже хотел было произнести первое слово, как вдруг остановился и задумался. В эту минуту отчетливо, как никогда прежде, представил он себе, *что* собирается сказать своим слушателям... Словно бомба была у него в руках, и он должен был вот-вот бросить ее в этот тихий, сонный зал.

Ну что ж, он бросит!

И надо поскорее высказать самое главное — показать, где зарыт корень зла и почему пришел он к необходимости взорвать то, что всем представлялось незыблемым.

— Господа,— произнес, наконец, Лобачевский, — кажется, трудность понятий увеличивается по мере их приближения к начальным истинам в природе, так же, как она возрастает в другом направлении, к той границе, куда стремится ум за новыми познаниями. Вот почему трудности в геометрии...

Лобачевский посмотрел в зал. Все слушали внимательно. Это было то сосредоточенное и заинтересованное внимание, какое он всегда чувствовал на своих лекциях. Тогда он сделал первый решительный шаг к цели.

— Эвклидовы начала, несмотря на все блистательные успехи наши в математике, сохранили до сих пор первобытные свои недостатки. В самом деле, — повысил он голос, — кто не согласится, что никакая математическая наука не должна начинаться с таких темных пятен, с каких, повторяя Эвклида, начинаем мы геометрию, и что нигде в математике нельзя терпеть такого недостатка строгости, какой принуждены были допустить в теории параллельных линий? Правда, что против ложных заключений от неясности первых и общих понятий в геометрии предостерегает нас представление самих предметов в нашем воображении, а в справедливости принятых истин без доказательств убеждаемся простотою их и опытом, например астрономическими наблюдениями; однако ж все это нисколько не может удовлетворить ум, приученный к строгому суждению... Здесь намерен я изъяснить, каким образом думаю пополнить такие пропуски в геометрии. Изложение всех моих исследований в надлежащей связи потребовало бы слишком много места и представления совершенно в новом виде всей науки.

Последние слова Лобачевский произнес раздельно, и все разом насторожились.

В зале началось движение. Видно, слушатели ждали, что после краткого вступления профессор возьмет в руки мел и начнет писать формулы, а он произносит странные, почти крамольные речи. Лобачевский почувствовал, что настало время перейти к самой сути дела. Вот теперь он им скажет, теперь он бросит бомбу!

— Два только предположения возможны: или сумма трех углов во всяком прямолинейном треугольнике равна двум прямым углам — это предположение составляет обыкновенную геометрию; или во всяком прямолинейном треугольнике эта сумма менее двух прямых, и это последнее предположение служит основанием особой геометрии, которой я дал название «воображаемой геометрии».

Лобачевский резко вскинул голову и оглядел аудиторию. Симонов, еще университетский однокашник его, многолетний коллега, по общему мнению, даже близкий друг, переглянулся с Никольским и едва заметно пожал плечами. Потом на его тонких губах появилась обычная неопределенная улыбка, а маленькие серые глаза бесстрастно устремились в потолок. Профессор Никольский, сложив толстые пальцы на круглом животе, тяжело дышал. Дунаев, как всегда под хмельком, перегнулся через спинку стула и что-то шептал сидевшему впереди Купферу.

Лобачевский почему-то вспомнил, как Иван Иванович Дунаев обычно открывал курс своих лекций по химии:

— Алхимия, господа, есть мать химии. Дочь не виновата, что мать ее глуповата...

В этом грубоватом изречении таилась глубокая мысль: во всякой науке дети должны быть умней и сильней своих родителей, иначе как могла бы наука двигаться вперед?

Вот и сейчас происходит рождение новой науки. Но мать ее не глупая и невежественная алхимия, а мудрая и сильная геометрия, давно покорившая весь мир, царствующая в нем более двух тысячелетий. И все-таки «воображаемая геометрия» дерзает встать рядом со своей матерью, а завтра, может быть, скажет, что и переросла ее.

...На кафедре — создатель этой новой геометрии, тридцатитрехлетний профессор. Он предчувствует будущее молодой науки, ее трудный путь — борьбу с предубеждениями, непризнание, и только потом, наверное еще не скоро, победу и триумф. А видят ли, понимают ли это сидящие перед ним люди — математики, физики, астрономы?

Аудитория чувствует себя неловко. Николай Иванович Лобачевский, серьезный ученый, строгий, требовательный профессор, говорит сейчас вещи просто нелепые.

Что это за новая, «воображаемая геометрия», когда в мире существует только одна-единственная геометрия, веками дающая неизменно верные результаты и вполне удовлетворяющая человечество?

Пятый постулат? Это действительно темное пятно.

Но ведь должен будет рано или поздно найтись математик, который разрешит проклятую задачу! И почему бы именно на это не употребить Лобачевскому свое время и талант, вместо того чтобы заниматься изобретением противных человеческому разуму «воображаемых геометрий»?

Как может сумма углов прямолинейного треугольника быть меньше двух прямых углов! Ведь треугольники, большие и малые, измерялись сотни тысяч раз — транспортирами, угломерами, точнейшими инструментами, — и всегда оказывалось, что сумма их углов в точности равна 180°.

А Лобачевский, словно намеренно, поражал зал все новыми и новыми парадоксами. Да, в этой «воображаемой геометрии» была своя логика; одна ересь неуклонно влекла за собой другую.

Сумма углов треугольника, оказывается, не только меньше двух прямых, она даже и не постоянна — она зависит от длины сторон треугольника. Чем больше стороны, тем меньше сумма углов. В пределе, при бесконечном возрастании всех трех сторон, сумма углов будет стремиться к нулю. И раз углы зависят от длины сторон, значит, никаких подобных треугольников, как и вообще подобных фигур, существовать не может!

Между углом и длиной стороны треугольника обнаруживается незыблемая связь. И Лобачевский, быстро оглядев аудиторию, написал уравнение. В этом уравнении, связывающем каждый отрезок в пространстве с одним, вполне определенным углом, была сконцентрирована вся суть, весь смысл новой геометрии. Ученый видел, что его уравнение, четко написанное посредине доски, вызывает уже не только молчаливое недоумение — в зале улыбались...

Он понимал причину этих улыбок. Длина отрезка — величина линейная, ее можно измерять сантиметрами, вершками, дюймами — любой линейной мерой. А угол? Угол — величина отвлеченная, не имеющая размерности, он всегда измеряется отношением части окружности — дуги — ко всей окружности в целом. Значит, зависимость между углом и отрезком противоестественна; она противоречит принципу однородности, требующему, чтобы обе части уравнения, правая и левая, всегда были величинами или одинаковой размерности, или отвлеченными.

Но так ли это? Разве нет в природе подобных, внешне разнородных связей? И Лобачевский попробовал убедить слушателей в справедливости этой своей главной идеи.

— Но ведь нельзя же сомневаться, — воскликнул он, — что силы всё производят одни: движение, скорость, время, массу, даже расстояния и углы. С силами все находится в тесной связи. И там есть прямая зависимость. Величина притягательной силы, например, выражается массой, разделенной на квадрат расстояния. Теперь спрашивается: как же расстояние производит эту силу? Как эта связь между двумя столь разнородными предметами существует в природе? Этого, вероятно, мы никогда не постигнем. Но когда верно, что силы зависят от расстояния, то линии могут быть в зависимости с углами. По крайней мере разнородность одинакова в обоих случаях...

В эту минуту Лобачевский почувствовал, что дальше продолжать не надо. Не надо и не к чему. Глухая, непробиваемая стена стояла между ним и людьми, сидящими в сумрачном зале. Его окружали пустота и холод одиночества.

Заседание Совета окончилось в глубоком молчании. Все прятали глаза, боясь встретиться взглядом с Лобачевским. Но до его слуха с разных сторон доносилось ироническое перешептывание.

...Так завершился тот день 11 февраля 1826 года — день рождения новой науки, который, как праздник человеческого ума, как одну из значительнейших вех на пути познания природы, отмечали все последующие поколения ученых. К сожалению, только последующие.

Современники Лобачевского, даже те, кому судьба подарила счастье услышать изложение основ новой великой науки из уст ее первооткрывателя, — даже эти люди не только ровно ничего не поняли, они не сделали попытки что-либо понять. Слова о необычайном и сложном, почти фантастическом строении мира, эти слова, сказанные впервые на земле, были обращены к глухим. Да, к глухим, потому что и слабого волнения ума не вызвали они у слушателей. Мысль их спала непробудным сном. Где уж там было искать смелости мышления, полета фантазии! Отсутствовало даже элементарное любопытство. И всего удивительнее, что не нашлось в аудитории человека, которому пришла бы в голову простая мысль: Лобачевский — высокоталантливый математик, это всем известно и всеми признано, это убедительно показала его предшествующая деятельность; так, может быть, и то, что он сейчас говорит звонким от волнения, но таким уверенным голосом, вовсе не является просто бредом? Может быть, здесь есть какой-то ими еще не понятый смысл и об этом стоит подумать?

Нет, никому это не пришло на ум.

Те смелые и даровитые математики и физики, которые преподавали в Казанском университете в студенческие годы Лобачевского, которые помогали юноше выработать истинно научное мировоззрение и способствовали развитию его математического таланта, к 1826 году уже ушли из университета, изгнанные режимом мракобеса Магницкого. Рядом остались люди небольшого таланта и неширокого научного кругозора.

Легко представить, что чувствовал Лобачевский, возвращаясь с Совета домой.

Один. Совсем один.

Сегодня он перешел рубеж. Половина жизни уже позади. Наверное, лучшая половина: детство, пусть трудное, юность, тоже нелегкая, но до краев наполненная мечтаниями и великими замыслами...

Где они теперь, учителя его юности? Где вольнодумец Карташевский, который привез из Московского университета заветы Ломоносова и идеи энциклопедистов, любовь к науке и чуткое внимание к запросам молодости? Где Бартельс, с такой горячностью поощрявший в нем стремление к самостоятельному творчеству и так часто спасавший его буйную головушку от гнева начальства и тяжелой кары?

Никольский... Разве можно обращаться к Никольскому, когда он давно уже предал науку! «Гипотенуза, милостью божьей» — так окрестили его на кафедре: выслуживаясь перед Магницким, подобными словами начинал он каждую лекцию. Да и остальные члены Совета постарались забыть, что существует в мире настоящая, дерзновенная наука. Он, Лобачевский, среди них одинок.

Трудно...

Но он не позволит себе пасть духом. Что ж, не поняли эти люди, поймут другие.

Комиссия из членов Совета должна была дать заключение о труде Лобачевского. Несколько лет она уклонялась от порученного ей дела. Лобачевский, став ректором, скорее всего посчитал неудобным оказывать какое-то давление на членов комиссии, торопить их. А они, вероятно, доброжелательно относясь к самому Лобачевскому, не пожелали заявить публично, что все услышанное ими 11 февраля 1826 года — абсолютная чепуха. Но постараться вникнуть в содержание новой геометрии, отрешившись от привычных представлений, попробовать разобраться в ней — так далеко доброжелательность комиссии не зашла. Потом, кажется, какой-то отзыв был написан, но он так и не увидел света. Больше того: члены комиссии не позаботились даже о сохранении самого доклада Лобачевского — первого в мире документа неэвклидовой геометрии.

Через три года, в 1829—1830 годах, Лобачевский напечатал в «Казанском вестнике» подробную работу о новой геометрии, начало которой повторяло его доклад. Потом снова и снова на разных языках писал и публиковал он свои труды, обращаясь к математикам всего мира — к современникам и потомкам. Геометрия Лобачевского, появившаяся на свет 11 февраля 1826 года, продолжала жить и развиваться.

Сто сорок лет прошло с того дня.

А в 1856 году Казанский университет хоронил своего любимого профессора, своего лучшего ректора, своего строителя в самом точном и широком смысле этого слова. Много прочувствованных речей прозвучало над могилой, много было пролито слез. Но из любви и уважения к памяти покойного все умолчали о его «чудачестве» — о том, что тридцать лет подряд он упорно занимался никому не понятной, ни с чем не сообразной, какой-то «воображаемой геометрией», которая была, очевидно, не чем иным, как плодом больного воображения. При жизни неудобно было препятствовать публикации работ уважаемого профессора и ректора, но зачем же теперь чернить его память!

Когда над гробом покойного говорят хорошие, заслуженно хорошие и добрые слова, всегда думаешь: как обидно и несправедливо, что эти слова, эти признания не довелось ему услышать при жизни.

Подобное, но еще более горькое чувство испытываешь, вспоминая о великих ученых, сошедших в могилу, так и не дождавшись признания своих идей. И может, обиднее всего за Лобачевского.

Почему?

Вероятно, среди математиков, а может и вообще всех ученых мира, не было человека, так беспредельно верного одной-единственной своей идее, отдавшего ей всю свою жизнь и весь свой талант.

Конечно, ему не пришлось идти на костер — не то было время. Но унижений и горечи он испытал предостаточно.

Сто лет назад умер гениальный математик, так и не увидев ни торжества, ни даже простого публичного признания своих идей.

Постараемся же проникнуть в мир геометрии Лобачевского. Пусть это трудно — а это и в самом деле трудно! — но теперь мы уже твердо знаем, что неэвклидова геометрия не плод фантазии, а одно из замечательнейших завоеваний человеческого гения.

Лобачевский прорубает окно в мир «непредставляемого»

В этой повести хотелось бы лишь наметить контуры идей, совершивших переворот в научном мышлении и восприятии мира, идей, вокруг которых так сложно и трагически переплелись судьбы трех гениальных ученых.

Неверно, что человек ограничен в своей способности воспринимать и представлять явления природы, отличные от тех, что кажутся «очевидными и не вызывающими сомнения».

Наглядное представление непредставляемого в значительной степени зависит от тренировки нашего мышления.

Множество поколений людей было убеждено, что Земля плоская. Если она шар, то, значит, наши антиподы ходят «вниз головой»? Это казалось нелепицей даже после того, как Колумб открыл Америку, а каравеллы

Магеллана совершили первое кругосветное плавание. Кругосветными путешествиями уже давно никого не удивишь. И представление о шарообразности Земли с самого детства укореняется в нашем сознании.

Солнце ходит вокруг покоящейся в центре мироздания неподвижной Земли — это учение веками было освящено религией. Джордано Бруно долго пытала и сожгла на костре инквизиция «святой церкви» за непоколебимо отстаиваемое убеждение, что Земля вместе с другими планетами обращается вокруг Солнца, а само Солнце — всего лишь одна из бесчисленных звезд Вселенной, которая «не имеет предела и края, но безмерна и бесконечна». Ныне гелиоцентрическая теория — азбучная истина. И теперь, глядя на Солнце, мы очень легко представляем себе его огромным шаром, вокруг которого движется по замкнутой орбите маленькая Земля.

Таким образом, расширение наших знаний и весь коллективный опыт человечества постоянно заставляют нас по-новому видеть окружающий мир.

Как трудно дается науке постижение явлений в микрокосмосе, с одной стороны, и во всей необъятной Вселенной — с другой! Ученые мобилизуют на это весь арсенал современной физики: теорию и тончайшие эксперименты. Прямое наблюдение как единственный способ изучения окружающей природы давно уже отошло в прошлое. Ведь явления в микромире вообще непосредственно не наблюдаемы. Вирусы — вот самые малые объекты, различимые в электронный микроскоп. Тайны Вселенной тоже раскрываются не только при прямом наблюдении небесных светил. И хотя наиболее мощные из телескопов помогают ученым проникнуть в глубины галактик уже на расстояние около десяти миллиардов световых лет, детали строения мы пока можем разглядеть только у ближайших к нам планет Солнечной системы.

А между тем в этих двух мирах — в микрокосмосе и космосе — происходят вещи, совершенно непривычные для нас и, казалось бы, абсолютно непредставимые.

Лобачевский открыл нам удивительный, «непредставляемый» мир. Им был начат новый этап тренировки научного мышления человека. Он подготовил почву для последующих всходов науки и сам посеял первые зерна. Когда появилась теория относительности с ее небывалыми воззрениями на пространство и время, она смогла быть понята и быстро заслужить признание в значительной мере потому, что Лобачевский уже более чем за три четверти века до того сказал, что геометрия нашего пространства может отличаться от эвклидовой.

Лобачевский первый перевернул и разрушил незыблемые представления о пространстве. Развивая идеи неэвклидовой геометрии, математики постепенно приучали научное мышление к тому, что можно и нужно представлять себе пространства различного строения. Они шаг за шагом создавали строгий математический аппарат для описания таких пространств и явлений, в них происходящих. Лобачевский в своей «воображаемой геометрии» первым начал ковать математическое оружие для нашей современной физики.

Безграничны возможности человеческого познания. Природа постепенно раскрывает перед нами все более сложные, тонкие и часто совершенно неожиданные свои закономерности.

И так же безгранична способность человеческого мозга не только понимать и воспринимать, но и представлять себе интуитивно эти новые, прежде неведомые реальности.

Вот одно из самых странных и неожиданных открытий физики XX века — открытие двойственной природы квантов света и элементарных частиц. Они ведут себя одновременно и как волны и как частицы. Еще сравнительно недавно это казалось невероятным и уж, конечно, совершенно непредставимым. А теперь физик запросто обращается с фотонами, электронами, протонами, нейтронами, словно реально представляет себе их в виде волн-частиц. И можно утверждать, что исследователи сегодня в самом деле «видят» их своим особым, постепенно сформировавшимся в долгом опыте «внутренним зрением».

Вся квантовая механика, теория относительности, физика атомного ядра и элементарных частиц основаны на таких «непредставимых» физических явлениях.

Каждому, кто впервые знакомится с этими явлениями, они кажутся невероятными, дикими, недоступными пониманию, часто ошеломляющими. Наши наглядные представления, наше пространственное воображение, которые обычно очень помогают нам в постижении неизведанного, тут не только отказываются служить, но даже восстают против насилия над ними. И ученым приходится понимать новое как бы вопреки собственной интуиции, вопреки, казалось бы, незыблемо укоренившимся представлениям. Однако это не мешает работе исследователей, скажем — работе физиков, которая уже привела не только к представляемым, но и к совершенно осязаемым результатам — к тому великому и ужасному, что принесло человечеству овладение атомной энергией.

Лобачевский был пионером такого ви́дения невидимого, представления непредставляемого, такого активного вторжения в огромный чудесный мир сущности явлений.

Геометрия Эвклида и геометрия Лобачевского

Основные теоремы геометрии Лобачевского настолько противоречат нашим врожденным и воспитанным в нас представлениям о пространстве, что вначале их трудно принять даже как условную гипотезу. Недаром те математики, которые, подобно Саккери, близко подошли к идеям неэвклидовой геометрии, боялись поверить в них до конца.

Проследим тот логический путь, которым шла мысль Лобачевского.

Пятый постулат пытались вывести как теорему из остальных постулатов геометрии. Но и самые изощренные математики или допускали ошибку в доказательствах, или приходили к мысли о невыполнимости задачи. Так, может быть, пятый постулат действительно недоказуем? Если это так, то, значит, он совершенно независим от остальных постулатов — от основ абсолютной геометрии.

Итак, нельзя доказать, что через точку, лежащую вне прямой, проходит на плоскости только одна параллельная прямая, а все прочие при своем продолжении данную прямую пересекут. Но если нельзя доказать, что верно это, то можно предположить, что верно обратное: на плоскости через точку, лежащую вне прямой, проходит не одна, а две, десять, сто или вообще бесчисленное множество прямых, нигде не встречающих данную прямую...

Такое допущение и сделал Лобачевский.

Значит, спросит читатель, вместо одной параллельной прямой, проходящей через данную точку, на плоскости Лобачевского их появилось бесконечное множество?

Прежде чем ответить, объясним возникновение нового геометрического образа — «плоскость Лобачевского». Выдвинув вместо пятого постулата Эвклида свое допущение, Лобачевский сразу расстался с привычным пространством эвклидовой геометрии, в рамках которой такому допущению просто не было места. Отвергнув обязательность пятого постулата, Лобачевский тем самым открыл существование пространства с особыми свойствами, совершенно не похожего на то привычное нам пространство, в котором протекает вся наша жизнь. О замечательных свойствах этого пространства и глубоком смысле геометрии Лобачевского пойдет речь впереди. Пространство Лобачевского, подобно пространству Эвклида, населяют различные геометрические образы. Так вот, плоскость, «живущая» в неэвклидовом пространстве и поэтому, естественно, подчиняющаяся законам новой геометрии, и называется «плоскостью Лобачевского».

Теперь вернемся к параллельным. Вспомним прежде всего определение параллельных прямых, смысл этого слова.

Параллельными, говорит Эвклид, называются две прямые, расположенные в одной плоскости и не встречающиеся.

Начертим обычную прямую и точку над ней, а из точки проведем веер прямых, расходящихся в разные стороны. Мы знаем, что на обычной — эвклидовой — плоскости только одна прямая из этого пучка будет параллельна исходной прямой, а остальные пересекутся с ней.

Перенесем мысленно наш чертеж на плоскость Лобачевского. Это можно сделать только мысленно. В том земном мире, где мы живем, нас непосредственно окружает пространство Эвклида, и всякое перенесение в него линий и других геометрических фигур неэвклидова пространства будет условным. Действительно, если на эвклидовой плоскости изобразить уже знакомый нам чертеж — прямую и над ней пучок проходящих через одну точку прямых, — но на этот раз принадлежащий плоскости Лобачевского, то получится одно из двух: или множество проведенных через одну точку прямых, которые, согласно геометрии Лобачевского, не должны пересечь исходную прямую, пересекут ее на наших глазах, или, чтобы этого не случилось, прямые придется изображать в виде искривленных линий.

Если глубоко вдуматься, то во всем этом нет ничего удивительного; действительно, человек может вообразить или изобразить, вообще говоря, только то, что он наблюдает в природе. Ведь в конце концов и вся фантастика — это комбинация, пусть совершенно неожиданная, того, что нам уже известно. Даже богов человечество изображало подобными себе или окружающей природе. Образное познание мира ограниченно. Но, к счастью, наука есть не только образное, зрительное познание.

Итак, зрительный образ прямых пространства Лобачевского чрезвычайно условен. Приготовьтесь к этому — вы отчалили от привычной вам земли и пускаетесь в плаванье по неизведанному.

Забегая вперед, расшифруем, о каком «неизведанном» здесь идет речь. Океан, по которому мы поплывем, — это безграничные просторы Вселенной, это огромные пространства, по сравнению с которыми мала не только Солнечная система, но и наша Галактика — Млечный Путь с его мириадами звезд. Обостренной интуицией, инстинктом гения Лобачевский почувствовал, что пространство такой гигантской протяженности может быть не похоже на эвклидово пространство относительно небольшого мира, в котором мы живем и который пока доступен нашим наблюдениям. Вера в возможность существования пространства более сложного строения и позволила Лобачевскому бесстрашно отвергнуть незыблемый пятый постулат и взамен него предложить иную картину геометрии мира.

Теперь ясно, что Лобачевский ни одной минуты не утверждал, что вот эти прямые, мелом начерченные им на доске и наклоненные под разными углами к исходной прямой, не пересекут ее. Он сам подчеркивал, что его чертеж целиком условен. И объяснил, почему:

все дело тут в масштабах, в протяженности рассматриваемых расстояний.

Если рассматривать кусок плоскости Лобачевского в масштабах бумаги, доски, комнаты, даже какого-нибудь гигантского чертежа размером с нашу Землю или с Солнечную систему, то те прямые пучка, которые не пересекут исходную прямую, пойдут так, что мы их не отличим от единственной параллельной эвклидовой плоскости, хотя в действительности они все же отстоят от нее, и тем дальше, чем больше мы станем увеличивать размер нашего чертежа. При каких же расстояниях это расхождение станет заметным? Чем вообще определяются такие расстояния? Иными словами, когда вступает в свои права геометрия Лобачевского?

Об этом речь пойдет позднее, а пока вернемся к поведению прямых в плоскости Лобачевского.

Итак, мы условились, что наш чертеж находится как бы на плоскости Лобачевского, что прямые там и остаются прямыми и ведут себя так, как им положено вести себя в неэвклидовом пространстве. Тогда только часть прямых пучка, проведенного через одну точку, пересечет исходную прямую, остальные с ней никогда не встретятся, как далеко мы их ни станем продолжать. И тех и других будет бесконечное множество.

Но равноправны ли все те прямые пучка, которые не встречаются с исходной прямой? Мы знаем, что те, которые ее пересекают, равноправны в том смысле, что все они ей не параллельны. А не пересекающие?

Чтобы на этот вопрос ответить, надо знать определение, смысл слова «параллельные» в неэвклидовом пространстве Лобачевского. Ведь естественно ожидать, что в пространстве с другими свойствами содержание геометрических понятий будет иным.

Так вот, прямые, лежащие в нашем веере, на границе между множеством пересекающих и множеством не пересекающих прямых, иными словами, *первые прямые, не встречающиеся с исходной прямой, Лобачевский и называет параллельными ей.*

Очевидно, что при таком определении из каждой точки плоскости можно провести только две прямые, параллельные данной. Они располагаются по обе стороны от перпендикуляра, опущенного из этой точки на исходную прямую, и лежат симметрично относительно него.

Таким образом, Лобачевский постулировал, что через каждую точку на плоскости в его новом пространстве проходят две прямые, параллельные данной прямой. Заменив своим постулатом роковой пятый постулат Эвклида, но сохранив в неприкосновенности все остальные, Лобачевский на этой основе построил новую геометрию — геометрию открытого им пространства, совершенно безупречную во всех своих частях, не содержащую никаких противоречий.

В эвклидовой плоскости угол между перпендикуляром и параллелью всегда, как известно, равен 90°. На плоскости Лобачевского угол между перпендикуляром и каждой из двух параллелей к прямой всегда будет меньше 90°. Более того, величина этого «угла параллельности», как называет его Лобачевский, непостоянна: она меняется в зависимости от длины перпендикуляра, опущенного из точки на первоначальную прямую. Когда длина перпендикуляра, уменьшаясь, стремится к нулю, угол параллельности, возрастая, стремится к 90°, а когда перпендикуляр растет до бесконечности, этот угол становится равным нулю.

Поймем эту особенность новой геометрии, и нам останется сделать последний шаг, чтобы прийти к основному, фундаментальному свойству пространства Лобачевского — к основному закону его геометрии.

С этим-то законом труднее всего было примириться даже крупнейшим математикам прошлого.

Речь идет о связи между углом и стороной треугольника, точнее, о знаменитом соотношении между углом параллельности и длиной перпендикуляра, о той формуле, которой Лобачевский закончил 11 февраля 1826 года свой доклад на Совете.

Прежде чем продолжать путешествие по миру Лобачевского, вглядимся еще раз в окружающий нас привычный мир.

Как мы представляем себе пространство?

Вот оно, безбрежное, простирается безгранично во всей Вселенной, всюду одинаковое, неизменное, однородное. В любом уголке Вселенной, в любой части этого пространства мы можем строить совершенно одинаковые геометрические фигуры. Мы можем пропорционально уменьшать или увеличивать их, то есть строить тысячи подобных фигур. Так, нам нетрудно вообразить крошечный треугольник со сторонами, не превышающими долей миллиметра, и множество других, подобных ему, стороны которых придется измерять сотнями, тысячами, миллионами километров. Но угол, заключенный между двумя сторонами маленького треугольника, будет в точности равен соответствующему углу в треугольнике-гиганте. А это значит, что между величиной угла и длиной его сторон нет решительно никакой связи. И, как частный случай этого общего закона, угол между двумя взаимоперпендикулярными сторонами, другими словами, между перпендикуляром и параллелью к прямой, какой бы длины они ни были, всегда равен 90°.

Все это так просто, так естественно и понятно... Еще со школьных лет все это стало привычным для нас... Здесь все как быть должно! Наши чувства, наша интуиция говорят: все правильно! Все правильно, говорит и геометрия Эвклида, геометрия привычного нам мира.

Но может быть и иначе, — возражает ей геометрия Лобачевского. — То, что в вашем мире существует независимо друг от друга, в моем тесно связано между собой.

Длина перпендикуляра мала — угол параллельности велик.

Перпендикуляр растет — угол уменьшается.

Вспомним иронические улыбки первых слушателей Лобачевского: ведь если все это верно, то нарушается «принцип однородности». На первый взгляд кажется, что это действительно так. Но если бы слушатели уже тогда, отрешившись от предвзятости, дали себе труд внимательней приглядеться к основному уравнению Лобачевского, они увидели бы, что на самом деле такого нарушения в нем нет. В этом уравнении угол определяется не просто длиной перпендикуляра, то есть не просто отрезком прямой, а отношением этого отрезка к некоторому другому постоянному отрезку, значит — тоже отвлеченной величиной. Следовательно, и слева и справа в этом уравнении стоят величины однородные.

Итак, трудность сама собой устранилась. Сама собой? Нет! Она исчезла ценой появления новой, гораздо более серьезной трудности: появился некий постоянный отрезок, единственный для данного пространства!

Как это понять?

Что же это за отрезок?

Вот здесь-то и скрыта сама сущность геометрии Лобачевского — то зерно, из которого выросло потом раскидистое и мощное дерево современных представлений о строении пространства Вселенной.

Предположение, что сумма углов треугольника может быть и меньше 180°, не казалось таким уж абсурдным наиболее смелым из математиков. Его допускал и Саккери. А позже Лежандр и другие. Они готовы были примириться и с некоторыми следствиями, вытекающими из этого допущения. Но как только цепь рассуждений с неизбежностью приводила к существованию однозначной зависимости между углом и отрезком, так ум их возмущался, восставал, и они сразу выносили приговор геометрии, построенной на таких основаниях: нет, она существовать не может, она ложна.

То, что на пути других математиков вставало непреодолимым барьером, Лобачевскому послужило трамплином для смелого прыжка в новый мир.

— Нет, эта геометрия не ложна! — сказал он. — Пусть она сложнее эвклидовой, но зато она гораздо шире ее: геометрия Эвклида есть только частный — предельный — случай этой новой геометрии.

Ее сложность отражает сложное строение нашего мира, который мы пока познали и рассматриваем лишь в первом — грубом — приближении. А при дальнейшем развитии науки и наших представлений о пространстве, о Вселенной, несомненно, возникнут новые геометрические системы; они должны будут соответствовать этому новому, более высокому уровню знаний, и с их помощью ученые смогут описывать более тонкие особенности строения мира — те особенности, что сегодня еще ускользают от нас.

Так думал Лобачевский.

Его необычайно широкий взгляд на вещи помог ему проникнуть в глубину, в суть явлений. Лобачевский подходил к геометрии не только как к чисто логической науке, что было твердым правилом у всех математиков. Он тесно связывал ее с физикой и астрономией. По тем временам это был невиданно смелый подход к одной из самых отвлеченных наук. Он рассматривал геометрию нашего пространства как геометрию реального многообразного мира движущейся материи — в этом величайшая заслуга и величайшая победа Лобачевского.

Вдумайтесь в знаменательные слова, сказанные на Совете: «Но в том, однако ж, нельзя сомневаться, что силы всё производят одни: движение, скорость, время, массу, даже расстояния и углы. С силами все находится в тесной связи».

Самый гениальный ум, забежав на столетие вперед, не может все точно предвидеть и конкретно объяснить. Лобачевский сумел предсказать существование связей между, казалось бы, совершенно разнородными, чуждыми друг другу величинами. И поразительно, как уверенно, без тени колебаний говорил он о таких связях.

Путешествие в пространство Лобачевского

Каким представлялся наш мир ученым во времена Лобачевского, да и значительно позже? Что было фундаментом, основой всех естественнонаучных взглядов?

Абсолютное, везде одинаковое, ни с чем не связанное, ни от чего не зависящее в р е м я. Абсолютное, всюду однородное п р о с т р а н с т в о с абсолютной, везде одинаковой и тоже ни от чего не зависящей геометрией. В таком абсолютном пространстве и таком абсолютном времени существует, подчиняясь физическим законам, вся материя. Вот, например, закон всемирного тяготения. Он определяет зависимость силы взаимного притяжения тел от величины их масс и расстояния между ними. И, конечно, все ученые были убеждены, что ни массы, ни силы, ни связывающие их законы от времени и пространства не зависят, так же как время и пространство не зависят ни от чего. Никому и в голову не могло прийти, что природа вещей может быть иной.

— Нет, — возражал Лобачевский. — С силами, с массами тесно связано само время, от них зависит и строение пространства, то есть его геометрия.

Почти через столетие такую зависимость подтвердит, найдет для нее физическое объяснение и математически выразит ее величайший физик XX века Альберт Эйнштейн.

Созданная им общая теория относительности и есть описание таких связей, царящих в природе. Они, эти связи, лежат не на виду, не на поверхности явлений, а спрятаны очень глубоко. Потому-то существование их даже наиболее смелые и проницательные умы могли сначала только предсказать, да и то в самой общей форме. И лишь впоследствии, когда наука раздвинула горизонты наблюдаемой части Вселенной, когда она создала разнообразную тончайшую аппаратуру для исследования космоса, глубочайшие эти связи были действительно обнаружены и подтверждены на опыте.

Именно об этом и писал Лобачевский:

«Когда верно, что силы зависят от расстояния, то линии могут быть также в зависимости с углами... Различие не заключается, собственно, в понятии, но только в том, что мы познаем одну зависимость из опытов, а другую при недостатке наблюдений должны предполагать умственно, либо за пределами видимого мира, либо в тесной сфере молекулярных притяжений».

Здесь все — предсказание будущего, предсказание, сбывающееся в наши дни...

Теперь мы можем ответить на вопрос, что же означает зависимость геометрии от сил или от масс.

Она означает, что пространство не является абсолютным и однородным, что геометрия его будет определяться величиной и распределением масс. Другими словами, наше реальное физическое пространство оказывается вовсе не эвклидовым.

Какое же главное, «зримое» геометрическое свойство будет отличать его от пространства Эвклида? Вспомним: чтобы параллельные Лобачевского действительно могли существовать, нам надо было покинуть обычную эвклидову плоскость и перейти на плоскость с новыми свойствами. Эту плоскость Лобачевского, оказывается, можно вполне зримо представить себе. Можно, как говорят математики, построить для нее модель.

Если взять особую, кривую поверхность, которую называют псевдосферой и которая очень похожа на колпак с загнутыми краями, то линии кратчайших расстояний на ней (то есть прямые) будут подчиняться законам Лобачевского, а не Эвклида: стороны треугольников будут зависеть от углов, пятый постулат будет неверен, параллельных будет у данной прямой не одна, а две... Словом, плоскость Лобачевского вовсе не плоская. У нее есть кривизна. Ну, а раз так, то и пространство Лобачевского должно обладать кривизной!

Если бы существовало физическое пространство четырех измерений и мы из него заглянули бы в трехмерное пространство Лобачевского, то сразу увидели бы, ощутили бы эту кривизну. А взглянув из такого четырехмерного мира на обычное пространство Эвклида, мы так же ясно увидели бы, что у него нет никакой кривизны. Оно «плоское».

Искривление пространства прямо следует из основного уравнения Лобачевского. Снова вспомним: в этом уравнении угол определяется не просто длиной стороны треугольника, а отношением ее к длине некоторого единственного неизменного отрезка. Это постоянная величина в уравнении Лобачевского. Каков ее физический или геометрический смысл?

Этот отрезок — не что иное, как радиус кривизны пространства Лобачевского.

Сразу же возникает вопрос об истинной величине радиуса кривизны. Лобачевский показывает, что теоретически этот радиус может иметь любые значения и каждому из них будет соответствовать свое искривленное пространство.

Но ясно, что вопрос о степени искривления реального пространства Вселенной лежит уже вне геометрии, его могут решить только физика и астрономия.

Ответив на этот вопрос, определив эту кривизну, физика, астрономия, космология — наука о строении Вселенной — ответят экспериментально, а не только теоретически, и на другой важнейший вопрос: какая же геометрия истинна и царит в нашем мире — эвклидова или неэвклидова? Во времена Лобачевского наука была бессильна пролить хоть какой-нибудь свет в этой области. В наши дни она уже кое-что может сказать. Но об этом — в конце книги.

А теперь переселимся в пространство Лобачевского.

Пространство, обладающее кривизной!..

Представить себе разнообразные искривленные поверхности нам очень легко: в жизни мы наблюдаем их на каждом шагу. Но часто не догадываемся или не задумываемся над тем, что многие из этих поверхностей целиком характеризуются одной константой, одной «собственной» постоянной величиной (или несколькими). Вот поверхность шара. Нам достаточно задать только радиус шара, как все в нем — его размеры, объем, кривизна его поверхности — все будет однозначно определено.

Поверхности более сложного типа тоже определяются радиусом кривизны, но уже не постоянным.

Этот радиус меняется от точки к точке, иногда от участка к участку. Но для всех поверхностей существует общий закон: если радиус кривизны будет все больше возрастать, то поверхность все сильнее будет приближаться к плоскости. Детский воздушный шарик справедливо кажется нам более «круто» искривленным, чем настоящий громадный воздушный шар. А радиус земного шара так велик, что даже самые наблюдательные из людей древности считали Землю плоской.

Кривизна и радиус кривизны не одно и то же. Это величины обратные: радиус мал — кривизна велика, радиус велик — мала кривизна. Кривизна плоскости, естественно, равна нулю, а это значит, что плоскость — как бы шар с бесконечным радиусом.

Так обстоит дело с кривыми поверхностями и плоскостью в пространстве Эвклида — в пространстве с нулевой кривизной.

Подобные же соотношения царят и в пространстве Лобачевского. Но, кроме того, пространство Лобачевского само искривлено и, повторяем, постоянная величина, входящая в основное уравнение Лобачевского, как раз и есть радиус кривизны его пространства. Теперь мы легко поймем, что в частном — предельном — случае, когда эта постоянная становится равной бесконечности, пространство Лобачевского переходит в пространство нулевой кривизны — в «плоское» пространство Эвклида. С другой стороны, в любой области пространства, размер которой мал по сравнению с радиусом кривизны, различие между обеими геометриями оказывается исчезающе малым.

Начерченные на бумаге параллельные Лобачевского имеют, как мы уже установили, чисто условный вид. Или, если мы их изображаем в виде обычных, эвклидовых, прямых, то они ведут себя не так, как повели бы в плоскости Лобачевского. Раньше или позже они пересекутся. Или их надо начертить такими, чтобы пересечение исключалось. Но тогда, глядя на чертеж, вы снова подумаете, что прямые линии не могут иметь такой формы, что это не прямые, а кривые и весь чертеж неправильный.

Но растяните мысленно этот листок на квадрильоны километров, на миллионы и миллиарды световых лет... Поручитесь ли вы, что он не приобретает «по дороге» кривизны? Ведь, не покидая двора своего дома, человек никогда не смог бы доказать, что Земля — шар... Или сожмите космос до величины листка бумаги. Вы сможете это сделать?!

Лобачевский сумел, он как раз это и сделал! И в этом сила его гения.

Мощью своего ума, инстинкта, своей фантазией и мечтой Лобачевский покорил для себя пространство и время — он словно предчувствовал свойства безграничных просторов Вселенной; так вырвался он из плена современных ему представлений и перешагнул через свой девятнадцатый век.

...Рассказывая о грядущих космических рейсах, Артур Кларк замечает:

«Наша цивилизация — не что иное, как сумма всех мечтаний, нашедших с веками свое реальное воплощение. И если люди перестанут мечтать, если они повернутся спиной к чуду Вселенной, то это будет верным признаком упадка человечества.

Но такова уж природа человека — как только его первый межпланетный корабль приблизится к Плутону и начнет описывать круги над его ледяными пустынями, выбирая место для посадки, он в мечтах своих будет преодолевать новые пространства, те, которые отделяют его от звезд».

Лобачевский сумел заглянуть в такие беспредельные дали, куда, вероятно, никогда не долетит ни один космический корабль. И у него не закружилась голова. Все, что он там увидел, он подчинил разуму, облек в строгие формулы математики. Вчитываясь в сочинения Лобачевского, чувствуешь, какой безграничный полет фантазии скрывается за его уравнениями, за сухими, тщательно отобранными словами.

Мир геометрии Лобачевского — это действительно совершенно особенный, не похожий ни на что нам известное мир. Его населяют образы до того странные, что наша интуиция, наше воображение, веками жившие в мире эвклидовой геометрии, воспитанные на ней, отказываются принять этот новый мир.

Если интуиция говорит нам, что в нашем земном пространстве нельзя построить геометрии, в которой параллельные линии сходятся и в которой не существует подобных фигур, то она, конечно, права. Это истина, установленная человеческой практикой за много тысячелетий, установленная всем опытом человечества. В чем же тут дело? Дело в том, что мы живем в мире, размеры которого малы по сравнению с этим возможным радиусом кривизны, то есть где кривизна пространства практически равна нулю в мире геометрии Эвклида. Лобачевский сам говорил, что его геометрия может быть только геометрией огромных пространств, гигантских межзвездных расстояний, геометрией Вселенной.

Чтобы доступно объяснить, каким расширением наших представлений стала неэвклидова геометрия, венгерский математик Имре Тот приводит любопытную аналогию.

Вообразим себе, говорит он, что некая планета населена одними млекопитающими. Никаких других живых существ на ней нет и не было. Ясно, что для людей, населяющих эту планету, понятие «живые существа» совершенно слилось с понятием «млекопитающие».

Теперь предположим, что нашелся на этой планете молодой ученый, биолог, который путем анализа, путем чисто теоретических рассуждений пришел к мысли, что понятие «живые существа» значительно шире, чем понятие «млекопитающие». Он сказал, что, по его теории, могут существовать живые существа и другого типа, такие, которые размножаются не рождением живых детенышей, а иным образом. Он пошел и много дальше: тщательно исследовав различные особенности живого организма, он теоретически описал целый ряд свойств, которые должны быть характерны для живых существ, отличных от млекопитающих.

Можно себе представить, какое возмущение вызвало это новое биологическое учение в среде консервативных биологов. Наш проницательный ученый, конечно, не мог им показать ни одного экземпляра «придуманных» им удивительных существ. Его коллеги издевательски говорили, что он хочет заселить зоологический сад их планеты чудовищами своей собственной фантазии... Они не поняли, что как раз в способности представить себе такой разнообразный мир живых существ и проявился гений молодого биолога.

В таком же положении оказался молодой геометр Николай Иванович Лобачевский, когда он рассказывал современникам — математикам и физикам — о свойствах открытого им нового мира геометрических образов.

Если бы биологи вымышленной планеты попали на нашу Землю, они своими глазами увидели бы, как велик и многообразен мир живых существ, среди которых млекопитающие составляют только один класс.

Для того чтобы попасть в мир геометрии Лобачевского, сегодня не надо отправляться в космическое путешествие. Наши знания и научное мышление человека уже так развились, что мы можем, не покидая своей планеты, овладеть не только этими представлениями, но еще и значительно более сложными.

...При жизни Лобачевский ни от одного человека не услышал: «Я понимаю тебя». Тридцать лет развивал он и объяснял свои идеи, оставаясь как ученый в абсолютном одиночестве.

«Аппендикс»

В то время когда Лобачевский докладывал на Совете университета о созданной им новой геометрии, Янош Бояи гостил в Марошвашархее.

Едва переступив порог родного дома, он тотчас увлек отца в его кабинет и сразу начал возбужденно рассказывать о своем замысле. Он создаст великое учение — абсолютное учение о пространстве! План будущего «нового мира» в общих чертах у него уже готов!

Фаркаш слушал рассеянно, и Янош видел, что его слова оставляют отца равнодушным, будто проходят мимо сознания.

— Ты хочешь помериться силами с творцом Вселенной? — вдруг с легкой улыбкой произнес отец. Потом заговорил с жаром: — Я снова предостерегаю тебя. Я вижу, моя несчастная жизнь повторяется в тебе. Я вижу тебя в ужасный шторм среди опасных подводных камней, где, что ни час, происходят кораблекрушения.

Лицо Яноша потемнело, пальцы нервно выбивали дробь по столу. Он хорошо знал, как это с ним бывает: гнев зарождался где-то в глубине, он сжимал сердце так, что не хватало воздуха и трудно становилось дышать, потом сразу комок подкатывался к горлу и начинал душить. Тогда уже ничто не могло остановить Яноша.

Сейчас он едва сдерживал этот закипающий гнев. От первой радости встречи не осталось и следа.

— Это все равно, что горящий факел погрузить в море,— продолжал ничего не замечающий Фаркаш. — Это настоящая болезнь, род помешательства, тираническая идея. Это то же, что квадратура круга, превращение металлов в золото, кладоискательство...

— Довольно! — с бешенством прервал его Янош. — Хватит! Ты мой отец... А что ты делаешь? Всеми мыслимыми способами ты стараешься принизить мою работу! Со всей горячностью, на какую способен, ты декламируешь против моей попытки найти причину бессилия стольких умов, против попытки проникнуть в самое существо вещей!..

Ссора произошла — ничто в характерах отца и сына уже не могло ее предотвратить.

Но, несмотря на размолвку, отец сдержал давнее обещание: снова предложил Яношу подготовить его работу к изданию в виде приложения к «Тентамену». Правда, он вынужден был поставить довольно суровое условие: все расходы по печатанию и изданию своего труда Янош возьмет на себя. Как всегда, Фаркаш переживал в ту пору большие материальные затруднения. Но, кто знает, может быть, тут сыграло свою роль и его неверие в работу сына.

Чтобы понять, каким тяжелым оказалось это условие для офицера с нищенским жалованьем, достаточно взглянуть на таблицу с чертежами в изданной брошюре Яноша Бояи.

На одном листе плотно, почти касаясь друг друга, изображены все 23 чертежа. Некоторые из них представляют собою даже целые комплексы чертежей, служащих для доказательства различных теорем. Больше того — чертежи не всегда идут последовательно, по порядку номеров: они размещены так, чтобы не пропало даром ни кусочка бумаги.

Удивительная сжатость и экономность текста в работе Яноша тоже в немалой степени объясняются стремлением всячески сократить расходы на печатание и бумагу. Конечно, долго и тщательно продумывая свое сочинение, Янош старался удалить из него все лишнее и сделать его возможно более стройным, изящным и немногословным.

Более пяти лет писал Янош свой труд. Наконец, в 1832 году, спустя три года после опубликования в «Казанском вестнике» мемуара Лобачевского «О началах геометрии», вышел в свет толстый том «Тентамена» Фаркаша Бояи с сочинением сына в виде приложения. Янош так и назвал его: «Приложение, содержащее абсолютно истинное учение о пространстве», или сокращенно «Appendix». Под этим латинским именем творение Яноша и вошло в историю науки.

«...Кто же будет первым читателем, первым судьей моей работы, так и не понятой отцом? — думал Янош.— Конечно, Гаусс!»

И, простив давнишнюю обиду, после молчания, которое длилось пятнадцать лет, Фаркаш по воле сына взялся за перо.

«Достопочтенный Гаусс! Прости, что я тебя тревожу в твоем путешествии; сделай маленькую остановку и подари минуту дружбе».

Фаркаш издали следил за жизнью друга, через общих знакомых узнавал о его делах, радовался его успехам и гордился его славой. Письмо догоняло уехавшего на летние вакации профессора Геттингенского университета.

Коротко сообщив о своих делах и занятиях сына, Бояи продолжал: «По просьбе Яноша я посылаю тебе его маленькое сочинение; будь добр, посмотри на него своими острыми, проницательными глазами и произнеси без пощады высокий приговор, которого я страстно жду... Мой сын ставит на твое суждение больше, чем на суждение всей Европы», — писал Фаркаш, вспоминая свой горячий спор с Яношем и его убежденные слова, что Геттингенский Колосс все поймет.

Колосс не только понял. Его «острые, проницательные глаза» сразу увидели все. Едва прочитав «Аппендикс», он тут же написал письмо своему ученику и другу Герлингу, жившему в Марбурге:

«На днях я получил небольшое сочинение из Венгрии о неэвклидовой геометрии, в котором я нашел все мои собственные идеи и результаты, развитые с большим изяществом, хотя, вследствие сжатости изложения, в форме, трудно доступной тому, кому чужда эта область. Исследователь — очень молодой австрийский офицер, сын моего друга юности, с которым в 1798 году я часто беседовал об этом предмете, хотя тогда мои идеи были гораздо дальше от завершения и зрелости, чем идеи, заключенные в самостоятельных размышлениях этого юноши. Я считаю, что этот юный геометр Бояи — гений первой величины».

Письмо Гаусса — свидетельство нескрываемого восхищения гениальностью молодого ученого и удивления перед силой его мысли. В нем признание в истинных чувствах.

Но, странное дело, великий математик почему-то решил сдержать эти чувства, когда подумал об отце и сыне Бояи, об их ожиданиях и надеждах, связанных с его «высоким приговором». Он не поторопился обрадовать их письмом, не поздравил старого друга, не воодушевил его сына на дальнейший труд. Напротив, Гаусс долго и осторожно отбирал слова, готовя свой ответ.

В Марошвашархей письмо со штемпелем Геттингена пришло только через месяц.

...Держа в руках еще не распечатанный конверт, отец торжественно направился в кабинет и позвал с собою Яноша. На темных стенах, окрашенных в густой коричневый цвет, висели три портрета: Шекспира — «сына природы», Шиллера — «внука природы» (так называл их Фаркаш, старый приверженец Руссо), и, конечно, Гаусса.

Усевшись в кресло, Фаркаш еще помедлил, прежде чем дрожащими руками надорвать конверт. Потом вынул письмо и стал читать вслух.

Но что это? Почему его старый друг сначала так подробно и пространно сообщает о своих делах и событиях последних лет, почему он сперва справляется о нем, Фаркаше, и только затем так непостижимо небрежно переходит к главному?

«Теперь кое-что о работе твоего сына. Если я начну с того, что я ее не должен хвалить, то на мгновение ты поразишься, но я не могу поступить иначе: хвалить ее значило бы хвалить самого себя, ибо все содержание этой работы, путь, по которому твой сын пошел, и результаты, которые он получил, — почти сплошь совпадают с моими, которые я частично получил уже 30—35 лет тому назад. Я действительно этим крайне поражен.

Я имел намерение о своей собственной работе, коечто из которой я теперь нанес на бумагу, при жизни ничего не публиковать. У большинства людей совершенно отсутствует правильное понятие о том, о чем здесь идет речь; я встречал только очень немногих, кто с особенным интересом относился к тому, что я им об этом сообщал. Чтобы быть в состоянии это понять, надо сначала живо ощутить то, чего, собственно, здесь недостает, а это большинству людей совершенно неясно. Но я имел намерение со временем нанести на бумагу все, чтобы эти мысли по крайней мере не погибли со мной.

Я поэтому чрезвычайно поражен случившимся — оно освобождает меня от этой необходимости; и меня очень радует, что именно сын моего старого друга таким удивительным образом меня предвосхитил».

Янош все ниже и ниже опускал голову. Отец молча отложил письмо и подошел к секретеру. Несколько минут он так же молча рылся в старых бумагах. Потом, не произнося ни слова, протянул сыну сложенный вчетверо лист. Янош развернул пожелтевшее от времени письмо и быстро пробежал его глазами:

«...У меня теперь столько других занятий, что я совершенно не могу в настоящее время об этом думать, и поверь мне, я буду сердечно рад, если ты меня в этом предупредишь и тебе удастся преодолеть все препятствия. Тогда я с искренней радостью сделаю все, что в моих силах, чтобы осветить твои заслуги и раскрыть их истинное значение...»

Янош взглянул на дату. Там стояло: Гельмштадт, 16 декабря 1799 года.

— А через пять лет он снова писал мне, что будет искренне рад, если я сумею преодолеть все трудности теории параллельных, — проследив за взглядом Яноша, тихо добавил отец.— Но ведь Гаусс, — вдруг спохватился он, — считает, что твое сочинение прекрасно, что оно принесет нашему отечеству и нашей науке славу!— договорил он уже с обычным жаром.

— Славу?! — взорвался Янош. — Славу он присваивает себе! Или, может быть, это ты все рассказал ему — выдал все мои идеи?! А этот жадный Колосс их присвоил?! А если не так, то все, что он пишет, неправда!..

Но это была правда. Гаусс действительно уже много лет раздумывал над возможностью создания геометрической системы, отличной от эвклидовой, и многие идеи такой геометрии были ему ясны. Об этом свидетельствует его переписка, которой Янош, конечно, не знал...

А эта переписка замечательна со многих точек зрения. Кроме всего прочего, она объясняет характер и психологию Геттингенского Колосса. Читая письма Гаусса, видишь, что совсем не случайно был так сдержан его ответ Фаркашу Бояи. При всем своем доброжелательном отношении к другим ученым, Гаусс неуклонно, всю жизнь, держался одной последовательной линии.

Гаусс и другие

В Харьковском университете с 1812 по 1816 год преподавал право профессор Швейкарт. Но главной его страстью издавна была теория параллельных. Еще в 1807 году он опубликовал свой вариант доказательства пятого постулата. И хотя он скоро сам нашел ошибку в этом доказательстве, неудача только удвоила его интерес к вечной проблеме. В Харькове Швейкарт особенно много занимался теорией параллельных, отдавая ей весь свой досуг. И в конце концов им начало овладевать убеждение в возможности существования не только эвклидовой геометрии — «геометрии в узком смысле слова», но и другой — «звездной», или «астральной», геометрии, как он ее называл.

В 1817 году Швейкарт переехал в Германию. Там вскоре встретился он и подружился с профессором Герлингом. Мы уже упоминали, что Герлинг был другом и учеником Гаусса и находился в постоянной переписке со своим учителем. Однажды Герлинг рассказал Швейкарту, что Гаусс интересуется проблемой параллельных линий. Обрадованный Швейкарт решил переслать королю математики свою небольшую заметку об «астральной геометрии». Герлинг помог ему сделать это.

Гаусс тотчас откликнулся. «Заметка профессора Швейкарта доставила мне необычайно много удовольствия, — написал он Герлингу,— и я прошу сказать ему по этому поводу от меня много хорошего. Все это как будто выписано из моей собственной души».

Дальше Гаусс привел некоторые начальные положения неэвклидовой геометрии, которых Швейкарт, видимо, не мог вывести из-за недостаточно глубокого знания математики. Однако Гаусс отнюдь не поощрил Швейкарта в его исканиях и даже не заговорил об опубликовании его заметки. Почему? Ответ на этот вопрос дает другое письмо геттингенца Герлингу.

Последний, перерабатывая учебник математики, хотел сделать такое примечание к пятому постулату:

«Доказательства этого предложения до сих пор найти не удалось, поэтому необходимо принять сие предложение за аксиому, пока кто-либо не найдет его доказательства или не обнаружит его неправильности».

Герлинг спрашивал у Гаусса, верно ли будет, по его мнению, подобное примечание.

«Я очень рад,— ответил ему учитель,— что Вы имеете мужество высказаться так, как будто Вы признаете возможным, что наша теория параллельных линий, а следовательно, и вся наша геометрия ложны. Но осы, гнездо которых Вы разрушаете, подымутся над Вашей головой».

Не в этом ли было все дело?! Гаусс не решался выступить во всеуслышание против привычных представлений: он боялся «разрушить гнездо ос». Вот почему писал он Фаркашу Бояи, что при жизни не намерен опубликовать ни слова из своих заметок по неэвклидовой геометрии. Об этом же говорил он в 1829 году известному математику Бесселю:

— Вероятно, я еще не скоро смогу обработать свои пространные исследования по этому вопросу, чтобы их можно было опубликовать. Возможно даже, что я не решусь на это во всю свою жизнь, потому что боюсь крика беотийцев *, который поднимется, когда я выскажу свои воззрения целиком.

Так обстояло дело. Из всего этого Янош Бояи знал только то, что Гаусс писал его отцу. Но молодому, прямодушному ученому, в котором жила «храбрость солдата», и этих признаний Гаусса было достаточно, чтобы со всем жаром отвергнуть его позицию и высказать свое собственное, противоположное, жизненное кредо.

— По моему мнению, — говорил Янош, — и, как я твердо уверен, по мнению всякого непредубежденного человека, все доводы, приводимые Гауссом в объяснение того, почему он при жизни не желает ничего опубликовать из своих собственных работ, относящихся к этому вопросу, совершенно бессильны и ничтожны. Ведь в науке, как и в повседневной жизни, цель состоит именно в том, чтобы всемерно выяснить и ярко осветить необходимые общеполезные вещи, в особенности еще не вполне ясные, и вместе с тем пробудить еще дремлющее сознание истины; это именно нужно укрепить и развивать. Понимание математики, к общему вреду и неблагополучию, присуще, к сожалению, лишь очень немногим; и ведь на таком основании и под таким предлогом Гаусс столь же последовательно мог бы сохранить в тайне значительную часть своих превосходных работ. То обстоятельство, что, к сожалению, среди математиков, и даже среди знаменитых, имеется еще много поверхностных людей, конечно, не может служить основанием для того, чтобы и в дальнейшем заниматься только поверхностным и посредственным и оставлять науку в летаргии, в состоянии, унаследованном ею от прошлого. Такого рода умонастроение справедливо было бы назвать противоестественным и совершенно бессмысленным. Поэтому производит крайне неприятное впечатление, что вместо прямого, честного, искреннего признания высокой ценности «Аппендикса» и всего «Тентамена», вместо того чтобы выразить свою радость, свое участие и подумать о тех средствах, которые проложили бы хорошему делу

* Беотия — область в Древней Греции, жители которой славились своей глупостью. Слово «беотийцы» стало у греков нарицательным так же, как у нас, например, «пошехонцы».

широкий путь,— вместо всего этого Гаусс старается избежать прямого пути и спешит излиться в благочестивых пожеланиях, в выражениях сожаления по поводу недостаточного образования людей. Не в этом, конечно, заключается жизнь, деятельность и заслуга...

Рассказывая о взаимоотношениях Яноша Бояи и Гаусса, нельзя не вспомнить здесь, кроме истории Фердинанда Швейкарта, печальную историю его племянника Тауринуса.

...Тауринус, как и Швейкарт, был юристом и сначала не чувствовал никакого интереса к математике. Однако уже сложившимся человеком, в тридцатилетнем возрасте, он «заразился» от своего дяди опасным увлечением.

Доказывая пятый постулат, Тауринус предположил, что сумма углов треугольника меньше 180° и вывел отсюда ряд важных теорем. Свою работу Тауринус в 1824 году послал Гауссу. Прежде всего Гауссу...

Ответ был весьма характерен. Гаусс заранее решительно противился любой попытке сообщить в печати что бы то ни было о существовании геометрической ереси.

Но письмо это интересно еще и тем, что Гаусс со свойственной ему ясностью мысли четко и стройно излагает в нем суть неэвклидовой геометрии и ее философское значение:

«Допущение, что сумма трех углов треугольника меньше 180°,— пишет он,— приводит к своеобразной, полностью отличной от нашей (эвклидовой), геометрии; эта геометрия совершенно последовательна, и я развил ее для себя абсолютно удовлетворительно: я имею возможность решить в этой геометрии любую задачу, за исключением определения некоторой постоянной, значение которой a priori установлено быть не может. Чем большее значение мы придадим этой постоянной, тем ближе мы подойдем к эвклидовой геометрии, а бесконечно большое ее значение приведет обе системы к совпадению. Предложения этой геометрии отчасти кажутся парадоксальными и непривычному человеку даже несуразными, но при строгом и спокойном размышлении оказывается, что они не содержат ничего невозможного. Так, например, все три угла треугольника можно сделать сколь угодно малыми, если только взять достаточно большие стороны; площадь же треугольника не может превысить, даже не может достичь некоторого предела, как бы велики ни были его стороны. Все мои старания найти в этой неэвклидовой геометрии противоречия или непоследовательность остались бесплодными, и единственно, что в этой системе противится нашему разуму, это то, что в пространстве, если бы эта система была справедлива, должна была бы существовать некоторая сама по себе определенная (хотя нам и неизвестная) линейная величина. Но мне кажется, что мы, кроме ничего не выражающей словесной мудрости метафизиков, знаем очень мало или даже ничего не знаем о сущности пространства; мы не можем смешивать того, что нам представляется неестественным, с абсолютно невозможным. Если бы неэвклидова геометрия была истинной и упомянутая выше постоянная находилась в определенном отношении к таким величинам, которые доступны нашему измерению на небе или на земле, то ее можно было бы определить a posteriori (из опыта). Я поэтому иногда в шутку высказывал желание, чтобы эвклидова геометрия не была истинной, потому что мы тогда имели бы a priori абсолютную меру длины».

Какой легкий и изящный штриховой набросок некоторых глубоких идей неэвклидовой геометрии! Появись он в печати за подписью Гаусса, «первого математика мира», он вызвал бы переворот в умах ученых и философов. Да, осы поднялись бы над головой почтенного профессора. Но зато молодые силы талантливых геометров, получив такую мощную поддержку, смело объединились бы, и новая наука пошла бы вперед семимильными шагами...

К несчастью, Гаусс остался верен себе:

«Относительно человека, который обнаружил глубокий математический ум, я не опасаюсь, что он дурно поймет изложенное выше, но во всяком случае Вы должны смотреть на это, как на частное сообщение, которое отнюдь не должно быть опубликовано», — писал он в заключение Тауринусу.

Ободренный пониманием Гаусса, Тауринус напечатал две брошюры, посвященные решению нескольких задач из области неэвклидовой геометрии. Однако он далеко не в полной мере сознавал, что соприкоснулся с величайшим открытием.

Тауринус твердо помнил запрет Гаусса и поэтому в предисловии к одной из своих брошюр лишь очень осторожно дал понять, что было бы интересно увидеть какую-нибудь публикацию крупнейшего математика Европы по этим вопросам.

Получив брошюру, Колосс разгневался. Создается впечатление, что он в самом деле испугался, как бы эти весьма завуалированные, предельно осторожные слова не послужили поводом для обвинения его в математической ереси. Он прекратил с Тауринусом переписку, не захотел даже выслушать его.

Потеряв поддержку ученого, которому он безгранично верил, Тауринус от потрясения заболел тяжелым нервным расстройством. Во время жестокого приступа болезни он сжег все экземпляры своих брошюр... Можно представить, как велико было отчаяние этого человека, еще недавно полного сил и надежд, если он собственными руками уничтожил свое детище!

Жизнь, честь и заслуга ученого

Испытанию, похожему на то, которое не выдержал Гаусс, почти в те же годы пришлось подвергнуться другому гениальному ученому. История как бы повторилась.

Речь идет о Чарлзе Дарвине и его эволюционной теории,— по выражению Маркса, грандиозной попытке «доказать историческое развитие в природе».

Изучая животный и растительный мир различных континентов, Дарвин собрал обширный материал, позволивший ему раскрыть секрет происхождения и эволюционного развития всех видов живых существ на земле. В 1839 году в знаменитом «Дневнике изысканий», опубликованном через три года после возвращения из плавания на «Бигле», он впервые письменно изложил свои «еретические» взгляды. Спустя пять лет, когда его наблюдения были еще более тщательно обработаны и оформлены, когда выводы были точно сформулированы и подтверждены целым «Монбланом фактов», Дарвин познакомил со своим трудом двух крупных ученых, руководителей Линнеевского общества Джозефа Гукера и Чарлза Лайелля. На этих первых читателей Дарвина его работа произвела очень большое впечатление, и оба они в течение многих лет уговаривали автора опубликовать ее.

Но Дарвин не спешил с обнародованием своего труда. Он продолжал работать над ним. В этом он был схож с Гауссом. Гаусс тоже очень долго и тщательно шлифовал сочинения, предназначенные для печати. Может быть, отчетливо сознавая смелость и новизну созданной им теории, Дарвин боялся какой-нибудь недоделкой или неточностью скомпрометировать великую идею эволюции в природе и хотел довести свою работу до совершенства, прежде чем выпустить ее в свет. Во всяком случае, здесь не было ничего похожего на боязнь заслужить репутацию ниспровергателя основ. «Крика беотийцев» Дарвин не страшился — об этом ясно говорит все его дальнейшее поведение.

Прошло еще четырнадцать лет непрерывной работы над эволюционным учением, и вот однажды Дарвин получил от своего друга Альфреда Уоллеса очерк, в котором нашел краткое изложение некоторых собственных взглядов. Уоллес просил Дарвина, если тот сочтет очерк достаточно новым и интересным, передать его Чарлзу Лайеллю.

Как же поступает Дарвин?

Он не пишет Уоллесу, что не видит в его работе ничего нового, потому что давно владеет основными идеями эволюции животных, хотя в действительности владел гораздо большим — он был уже автором капитального труда по эволюции и естественному отбору. Он не требует от Уоллеса, чтобы тот молчал в печати о новых взглядах, угрожая порвать с ним отношения, хотя эти взгляды были покушением на святая святых в «царстве ос».

Нет, ничего этого он не делает. Он немедленно препровождает очерк Лайеллю с самой высокой оценкой. И больше того — с предложением возможно скорее опубликовать его!

Лайелль и Гукер оценили этот акт скромности и великодушия, но они не захотели идти против истины. Они добились от Дарвина разрешения представить в Линнеевское общество вместе с очерком Уоллеса и его обширный мемуар. «Мы объяснили мистеру Дарвину,— пишет Лайелль, — что руководствуемся не только желанием установить относительные права на приоритет его и его друга, но и общими интересами науки, ибо мы признаем весьма желательным, чтобы взгляды, основанные на широких выводах и фактах и проверенные годами зрелого размышления, могли тотчас послужить точкой отправления для других исследователей».

Так Дарвин стал не только всеми признанным творцом эволюционного учения, но и основателем новой науки, называемой по праву дарвинизмом. А его благородный поступок в отношении Уоллеса делает только еще более привлекательным нравственный облик великого ученого...

Янош Бояи был прав, когда говорил, что в науке, как и в повседневной жизни, задача заключается в том, чтобы всемерно выяснить и ярко осветить необходимые, общеполезные вещи, в особенности еще не вполне ясные, и пробудить в людях еще дремлющее сознание истины. Именно так понимал и Дарвин смысл деятельности и заслуг ученого — смысл всей своей жизни.

Избежал ли Дарвин того, что так страшило Гаусса? Нет, конечно! Он явился одним из величайших революционеров науки всех веков. И это не могло быть ему прощено.

В Париже дважды выдвигали кандидатуру великого англичанина для избрания в почетные члены французской академии, и оба раза «бессмертные» проваливали ее.

В Германии «ученые осы» тоже сделали свое дело: там выбили свинцовую медаль, на которой Дарвин был изображен в карикатурном виде.

А на родине Дарвина всячески поносила церковь. И даже его учитель, профессор Седжвик, отказался принять в подарок от Дарвина книгу, заявив, что он оскорблен содержащимися в ней идеями.

Но Дарвин продолжал последовательно разрабатывать эволюционную теорию. И нет сомнения: знай он заранее, что дорога его не будет усыпана розами, он все равно не променял бы ее ни на какую другую!

Пути скрестились: Лобачевский и Гаусс

Шли годы. В Казани Николай Иванович Лобачевский писал и публиковал одно за другим сочинения по неэвклидовой — «воображаемой» — геометрии.

Первая печатная работа Лобачевского с изложением и развитием его смелых идей, возвещенных 11 февраля 1826 года на Совете Казанского университета, появилась, как мы помним, в 1829 году. Это был мемуар «О началах геометрии» — первое в мировой литературе публичное провозглашение принципов новой науки. А потом Лобачевский неустанно развивает и совершенствует свое творение. Он строит не только элементарную геометрию и тригонометрию неэвклидова пространства, как это сделал Бояи в «Аппендиксе», он идет намного дальше.

Сначала аналитическая, потом дифференциальная неэвклидовы геометрии, созданные Лобачевским, — это были части одного обширного стройного здания. Год за годом Лобачевский упорно его возводил, постоянно озабоченный и улучшением отделки этого здания — поисками совершенной формы. Сознавая, что первый его мемуар написан довольно сложным и трудным для понимания языком, Лобачевский настойчиво искал самый прозрачный способ изложения, самые ясные формулировки теорем, самые убедительные методы доказательств.

С помощью формул своей геометрии он нашел значения некоторых интегралов — и уже вычисленных ранее другими способами и тех, которые прежде найти не удавалось. Решение интегралов было еще одной проверкой правильности новой геометрии.

Надо сказать, что Лобачевский, проделав колоссальную работу, все же не был до конца удовлетворен. Он не считал ее совершенной и завершённой. Хотя он не сомневался в правильности, в непротиворечивости своей геометрии, и чем дальше он ее развивал, тем больше накапливалось фактов и доказательств, поддерживающих его абсолютную веру в нее, все же он упорно искал, искал всю жизнь последнее, решающее доказательство. Не негативное, какие он все время получал, а позитивное.

Да, действительно, каждый новый шаг, каждый вывод подтверждал: тут противоречий нет, неэвклидова геометрия свободна от противоречий. А Лобачевскому нужно было сделать такой шаг, найти такой ход, после которого он мог бы сказать: в неэвклидовой геометрии не только нет, но и не может быть противоречий.

Такого хода он не нашел до конца жизни. Не смог найти его и Бояи, хотя, может быть, искал его еще настойчивей, чем Лобачевский. И Гаусс его не нашел; вероятно, даже и не искал.

Решающий шаг в доказательстве непротиворечивости неэвклидовой геометрии был сделан около полувека спустя немецким математиком Гильбертом. А до него итальянский геометр Бельтрами дал первое убедительное доказательство логической правильности геометрии Лобачевского, построив ее на псевдосфере.

...Из всех сочинений Лобачевского наиболее доступной для восприятия явилась его небольшая работа «Геометрические исследования по теории параллельных линий», написанная по-немецки. Лобачевский стремился сделать неэвклидову геометрию достоянием математиков всего мира и потому писал некоторые свои труды на французском и немецком языках.

Изданные в Берлине «Геометрические исследования» Лобачевского попались на глаза Гауссу. Так скрестились их пути. Так Геттингенский Колосс опять встретил человека, восставшего против всех авторитетов.

Опытный глаз великого математика тотчас разглядел, что на этот раз перед ним не юноша, с трепетом ждущий его одобрения и поддержки, а зрелый исследователь, гигант математической мысли, уверенный в своей правоте и в жизненной силе созданной им науки. И благожелательное равнодушие Гаусса уступило место глубокой заинтересованности.

Гаусс занимался русским языком и раньше, но теперь удвоил свои усилия: он стремился поскорее познакомиться в оригинале с другими сочинениями Лобачевского.

«Я начинаю читать по-русски с некоторой беглостью и извлекаю из этого большое удовольствие, — писал он в феврале 1841 года своему ученику, астроному Энке.— Кнорре прислал мне маленькую, написанную на русском языке работу Лобачевского (в Казани), и благодаря ей, так же как и небольшому сочинению на немецком языке о параллельных линиях, мною овладело желание прочесть побольше сочинений этого остроумного математика. Как сказал мне Кнорре, «Труды Казанского университета», написанные на русском языке, содержат массу его сочинений».

И позже, в сорок шестом году, своему другу — тоже астроному — Шумахеру:

«Недавно я имел случай вновь просмотреть книжку Лобачевского («Геометрические исследования»). Она содержит основы той геометрии, которая должна была бы иметь место и была бы строго последовательной, если бы эвклидова геометрия не была бы истинной. Некто Швейкарт назвал такую геометрию звездной. Лобачевский называет ее воображаемой геометрией. Вы знаете, что я уже 54 года (с 1792 г.) имею те же убеждения (с некоторым позднейшим расширением, на котором не хочу здесь останавливаться); по материалу я, таким образом, в сочинении Лобачевского не нашел ничего для себя нового; но в его развитии автор следует другому пути, отличному от того, которым шел я сам; оно выполнено Лобачевским с мастерством, в истинно геометрическом духе. Я считаю себя обязанным обратить Ваше внимание на эту книгу, которая, бесспорно, доставит Вам совершенно исключительное наслаждение».

Что же написал Гаусс самому Лобачевскому?

Ничего. Ни единого слова. Это, очевидно, объяснялось тем, что в отличие от Бояи, Швейкарта, Тауринуса, которым, как мы видели, Гаусс писал, Лобачевский сам не обращался к нему ни за одобрением, ни за советом, ни за помощью.

И все-таки на этот раз Гаусс не до конца остался верен своему обыкновению. Он публично отметил высокие заслуги Лобачевского. Да, публично, а не только в частной переписке: он предложил избрать Лобачевского, «как одного из превосходнейших математиков русского государства», в члены-корреспонденты Геттингенского ученого королевского общества, где Гаусс состоял директором. Это было бесспорное признание.

И однако... как сложна была психология геттингенца!

Он постарался надежно замаскировать истинные мотивы избрания Лобачевского. Ни одного слова о главном открытии Лобачевского, о великом деле всей его жизни не было сказано Гауссом на заседании общества. Лобачевский был ректором и профессором одного из старейших русских университетов, автором различных математических трудов, — для коллег Гаусса этого было достаточно, чтобы они с готовностью приняли нового кандидата в свое сообщество.

В дипломе было сказано, что ученое содружество «...мужа ученейшего Н. Лобачевского выбирает своим другом и сочленом в научном общении, надеясь, что этим выражением своей оценки и своего благоволения оно достигнет того, что он будет усердно заниматься общей работой и, уважая пример Общества, его авторитет, честь и достоинство, будет делиться с ним своими открытиями, наблюдениями и мыслями...»

Хочется думать, что Лобачевский все-таки понял, чему он обязан своим избранием; что событие это несколько смягчило остроту ударов. Но вместе с тем сопутствующие обстоятельства или, вернее, отсутствие их — тот странный факт, что избрание не сопровождалось ни письмом с вопросами о неэвклидовой геометрии, ни научной дискуссией, — вероятно, вызвало у Лобачевского недоумение.

В самом деле, попробуем поставить себя на место Лобачевского и представить, что он мог чувствовать и думать в те дни.

Прежде всего, надо полагать, Лобачевскому и в голову не могло прийти, что есть или вообще возможны какие-нибудь причины, которые не позволяют Гауссу обсудить интересную для него математическую проблему. Что он, «король математики», может чего-нибудь или кого-нибудь испугаться. Что он промолчит именно тогда, когда ему особенно захочется объясниться. Он, Гаусс — непререкаемый авторитет, первый математик мира...

Нет, можно ручаться, что подобные мысли никоим образом не могли возникнуть у Лобачевского — при его благородстве, честности, прямоте и абсолютной преданности науке.

Так, может быть, Гауссу все это давным-давно известно? Может, он сам точно таким же образом «расправился» с пятым постулатом и построил неэвклидову геометрию на тех же, что и Лобачевский, основаниях?

И это маловероятно. Ведь Лобачевский был знаком с математической литературой Запада. И ему не попадалось ничего подобного — ни среди сочинений Гаусса, ни у кого-нибудь другого. А главное — едва ли российские математики осмелились бы так пренебрежительно отнестись к творчеству Лобачевского, знай они, что Гаусс разделяет его взгляды.

Так может, Гаусс просто не придал значения его работам, не посчитал их достаточно интересными, заслуживающими внимания?

Все в Лобачевском должно было противиться такому объяснению. Загадка пятого постулата была уж таким болезненным нарывом на теле математики, в течение столетий так беспокоила, так мучила геометров, что тот, кто вскрыл нарыв, освободил науку от этой боли, не мог не заслужить признательности первого из математиков. Нет, Гаусс просто не мог счесть работу Лобачевского не заслуживающей самого пристального и благодарного внимания.

А может, он ее просто не читал, не знал?

И это как будто бы отпадает. Ведь избрание Лобачевского последовало за опубликованием в Берлине «Геометрических исследований». Странно, в высшей степени странно, если это лишь случайное совпадение...

Может, Гаусс нашел ошибки, неточности в его работе?

Тогда почему он не написал об этом самому Лобачевскому?

Ни одно из возможных объяснений не могло показаться Лобачевскому убедительным. А истинной причины он не знал. И может быть, так же, как мы гадаем теперь о том, что мог подумать Лобачевский, он сам гадал — чем же все-таки объяснить столь необъяснимое поведение Гаусса?

Почему же Лобачевский сам не написал Гауссу, не попросил его высказаться о своей работе? Что тут сыграло главную роль? Гордость, нежелание быть навязчивым?.. Кто знает...

Вся история эта — нелегкая психологическая загадка, которая, вероятно, уже никогда не будет разгадана.

Так или иначе, но в согласии со стилем диплома Лобачевский в своем послании в Геттинген тоже не обмолвился ни словом о неэвклидовой геометрии. Поблагодарив Общество за избрание, он написал Гауссу: «я... выражаю желание, чтобы каждая из моих работ в научной области была бы достойна быть на одном уровне с превосходными трудами Общества; я во всяком случае направлю на то все мои усилия».

Так Лобачевский стал членом-корреспондентом Геттингенского королевского общества. Но это ничего не изменило в его судьбе.

Между тем, сделай Гаусс решительный шаг, откажись он от вечной своей осторожности, и Лобачевский был бы избавлен от грубых и унизительных нападок невежественных реакционных писак и закосневших академических авторитетов. Открытая поддержка такого ученого остановила бы не одну злую руку...

Но Гаусс не сделал этого шага, по-прежнему озабоченный сохранением собственного спокойствия. А потом случилось так, что вместо того, чтобы содействовать объединению усилий двух создателей нового мира — Лобачевского и Бояи, Гаусс связал их судьбы в трагический для Яноша узел.

Скрестились пути трех

Однажды летом 1844 года в венгерской газете появилась заметка математика Ментовича. Он писал о своей встрече и беседе с Гауссом. Геттингенский профессор расспрашивал о старом друге Бояи, о его сыне, а потом дал Ментовичу «Геометрические исследования» Лобачевского и сказал, имея в виду Яноша:

— Эта работа должна иметь для венгерского математика двоякий интерес: во-первых, по удивительному сходству взглядов Лобачевского с идеями молодого Бояи, а во-вторых, потому, что и другие работы Лобачевского, написанные на русском языке, должны быть венгру доступны (Гаусс ошибочно полагал, что венгерский язык принадлежит к славянской группе).

Лишь спустя четыре года отец и сын Бояи случайно увидели эту газету. Чтобы узнать об упоминавшихся в заметке Ментовича сочинениях неведомого русского математика, Фаркаш пообещал сразу же написать Гауссу.

Но, оставшись в кабинете наедине с самим собой — только портрет старого друга перед глазами, только воспоминания о нем в сердце, — семидесятидвухлетний

Бояи задумался о былом, и мысли его на время отвлеклись от просьбы Яноша. Они потекли по другому руслу...

Жизненный путь завершался, приближался конец, и все чаще и настойчивее вставал вопрос, как прожита жизнь, на что потрачены долгие годы? Нелегко было у Фаркаша на душе, и невозможно было не заговорить об этом с Гауссом. С этого и начал старик свое письмо.

«Кончился день. Ты получил достойную плату за свои труды. Моя плата — только внутренний покой, без всякой награды за то, что в борьбе с судьбой я стоял под знаменем правды.

Если бы я только не должен был краснеть за многие лучшие годы, когда бездонная теория параллельных линий с тысячью своих превратностей заставила меня совсем упасть духом и лишила мужества... Ах, если бы после такого бурного дня вечер не был бы пасмурен! Или пусть скорее опустится ночь!

Для нас обоих наступил последний акт нашей пьесы. Но тебе, когда упадет занавес, будет рукоплескать Вечность; я буду доволен. И после того как отзвонит колокол — верный спутник нашей судьбы, обо мне больше не заговорит ни один камень...»

Потом пришел ответ из Геттингена. Тоже безрадостный. Старый Гаусс вторил Фаркашу. Он признавался, что письмо «дорогого старого друга» было для него, «как голос духа далекого, отзвучавшего времени».

«Это верно, — продолжал он, — в моей жизни было много драгоценного, что в этом мире вызывает зависть. Но поверь мне, дорогой Бояи, суровые стороны жизни, по крайней мере моей, которые протянулись через нее красными нитями и против которых в пожилом возрасте становишься все более беззащитным, даже в сотой доле не могут уравновеситься радостью».

Такие признания могут показаться странными в устах короля математики. Но мы еще увидим, что́ в жизни Гаусса дало ему право на эти сетования.

...Наконец, перед Яношем лежала книга, где другой человек на другом языке излагал, казалось, его собственные идеи.

Янош был потрясен. Такое событие могло взбудоражить и менее страстного, менее неуравновешенного человека. Напор нахлынувших чувств был так силен и так неодолимо сознание одиночества, что хоть на бумагу надо было излить свои мысли и свое волнение. Под рукой оказались листки давнишней ненужной военной переписки. На их обороте запечатлелось все, что передумал и перечувствовал Янош в те дни...

«Если даже в этом замечательном произведении часто выбираются другие пути, — записывал он, — то дух и результаты настолько совпадают с моим «Аппендиксом», выпущенным в 1832 году, что этому нельзя не удивляться. Уже Гаусс, по его словам, был в высшей степени поражен замечательным совпадением работ мадьярского и московитского математиков. Воистину я этим поражен не меньше!

Конечно, сущность чистой истины как в Марошвашархее, так и на Камчатке, и даже на Луне, короче говоря, — на всем свете должна быть одна и та же. Что открывает одно разумное существо, то может открыть и другое — это не лишено вероятия. К тому же произведения ума, как и продукты природы, — по ходу развития человечества — имеют свое время, когда они появляются, как это, например, имело место в случае дифференциального и интегрального исчисления. Наконец, и самый предмет теории параллельных не особенно труден и не так уж скрыт. Но если все же подумать, как мало было даже среди лучших глубокомысленных математиков таких, которые пришли к осознанию этого пробела в геометрии и стремились к его восполнению; если подумать, что со времен Эвклида на протяжении всего существования человечества, несмотря на многие прекрасные глубокие исследования в этой области, ничего значительного не появилось, по крайней мере в печати; если все это принять во внимание, то вряд ли можно считать вероятным, что два или даже три человека, ничего друг о друге не зная, почти в одно и то же время, хотя и различными путями, почти полностью исчерпали вопрос...»

Тут Янош внезапно остановился. Возбужденное воображение подсказало ему странное подозрение: он подумал, а не мог ли Лобачевский получить экземпляр «Тентамена» и, оценив значительность изложенных в «Аппендиксе» идей, развить их собственным путем?.. Но Янош сразу опомнился: ведь в предисловии у Лобачевского сказано, что первая работа, где изложена «воображаемая геометрия», напечатана в 1829 году. Напечатана! Значит, его, Яноша, сочинение было опубликовано лишь спустя три года после выхода «Начал» Лобачевского! Версия плагиата развеялась. Но возбуждение не прошло. И Янош обратил свой гнев и подозрения на того, кто однажды уже нанес ему тяжелую рану: «Но еще вероятнее, что Гаусс — Колосс, и без того владеющий такими сокровищами, — не мог примириться с тем, что кто-то в этом вопросе его предвосхитил; и так как он уже не был в состоянии этому воспрепятствовать, то он сам обработал теорию и выпустил в свет под именем Лобачевского...»

Тяжело думать о той драме, которую переживал в те дни Янош.

А Лобачевский, конечно, даже не подозревал, какое большое, хотя и невольное участие принимал он в этой драме.

Янош много раз перечитывал сочинение Лобачевского, всесторонне, внимательно и придирчиво изучал каждую его фразу. Он все больше и больше убеждался, что перед ним лежит оригинальное, глубокое и уж, конечно, совершенно самостоятельное творение. Вслед за первым подозрением исчезло второе. С облегчением отбросил он их. Надо было примириться с новым ударом судьбы. И не только примириться...

Все свои мысли и чувства тех дней Янош Бояи запечатлел в пространных записях, которые назвал «Замечаниями по поводу «Геометрических исследований» Николая Лобачевского». Остроумные соображения истинно гениального математика перемежаются с проявлениями душевной боли человека, который, переживая свое непризнание, вдруг увидел, что вовсе и не он первооткрыватель новой геометрии. Но весь склад души непримиримо честного Яноша Бояи, его бескорыстная любовь к науке и правде заставили замолкнуть чувства обиды и разочарования. С открытым сердцем и глубокой искренностью говорит он в своих записках о Лобачевском:

«Я особенно радуюсь тому, что этой проблемой заинтересовались и другие люди, и пусть даже они пошли несколько иным путем, я с братским чувством протягиваю руку автору, с которым я ощущаю духовную связь, и потому я прошу простить мне то, хотя совсем незначительное, но необоснованное и ложное подозрение, которое я питал.

...И особенно я желаю счастья стране, которая произвела столь выдающийся талант, стране, в которой, как и вообще повсюду, предписывается, сколько будет дважды два, и где передовым и свободным идеям немедленно подрезают крылья, заковывают их в цепи или ставят им ловушки, так что они не могут даже шевельнуться; стране, в которой путь с самого начала предначертан и проложен, и гений под страхом смертной казни не имеет права даже на волос уклониться от него».

Конечно, такие слова не могли увидеть свет, не могли перейти границы и попасть в далекую Казань, к тому человеку, для которого они писались. Записи Яноша были найдены только через много лет после смерти обоих математиков.

РАЗНЫМИ ДОРОГАМИ

Три человека. Три жизни. Три судьбы...

Как различны, даже контрастны были эти люди во всем: и в отношении к науке, к своим открытиям, и в понимании смысла самой жизни!.. Все трое были гениальны. И Лобачевский. И Бояи. И Гаусс.

Но чем измерить степень гениальности?

— Есть много определений этой духовной способности, — говорил Лобачевский,— но они по большей части неудовлетворительны, потому что сами писавшие об этом не были гениями. Гений, утверждает Бюффон, есть терпение: только непрерывным трудом человек достигает, по его мнению, желаемых результатов. Но это неверно. Со своей стороны, я нахожу более удовлетворительным определение Лапласа. Он сказал: «Гений — это инстинкт».

Таким инстинктом обладали все трое. Это были три великих математика. Им был дан бесценный дар нового ви́дения мира. И с широко раскрытыми глазами, не убоявшись новизны, вступили они в область, дотоле никому не ведомую. Обширные невозделанные поля раскинулись перед их взорами. Им предстояло совершить титаническую работу. А судьба щедро наделила их силами. Но как по-разному распорядились они своей судьбой!

Карл Фридрих Гаусс

Гаусс. Карл Фридрих Гаусс.

Это имя многое говорит каждому математику, астроному, физику. Уже в те давние годы конца восемнадцатого века, когда зарождалась дружба между Гауссом и Фаркашем Бояи, студент из Брауншвейга был почти сформировавшимся ученым, полным замыслов, планов, идей. Его восторженный друг сразу увидел, как богато и многогранно содержание «этой молчаливой книги без титула» — так Фаркаш называл Карла. Да, Бояи не ошибся, предсказывая матери Гаусса, что сын ее станет первым математиком Европы!

Но мать и сама могла бы многое порассказать Фаркашу о своем Карле... Однажды, после починки водопровода в одном из бюргерских домов Брауншвейга отец Гаусса, мастер-водопроводчик, рассчитывался с подсобными рабочими. Рядом вертелся трехлетний Карл. Вдруг он заявил, что отец ошибся. Все заулыбались, а мальчик, нахмурив брови, с минуту напряженно думал, а потом сказал, сколько у него получилось. Окружающие продолжали посмеиваться, но Карл настаивал на своем. Тогда отец произвел весь расчет сначала. И, ко всеобщему удивлению, оказалось, что прав маленький Гаусс. Соседи долго толковали об этом случае...

А мальчик рос, мужал, читал книги, учился думать. И позже, едва став студентом университета, он уже как зрелый математик бесстрашно вступил в тот круг нерешенных проблем, которыми природа окружила естествоиспытателей.

...В одной из первых глав этой книги рассказано о некоторых «вечных задачах» геометрии древних греков, для решения которых можно было пользоваться только циркулем и линейкой. Была еще одна такая «вечная задача»: деление круга на равные части, или, иными словами, построение правильных многоугольников, вписанных в круг. Древние нашли формулу для числа сторон таких многоугольников и полагали, что их формула полностью исчерпывает все возможности. Столетиями математики придерживались этого мнения.

Но вот в июне 1796 года в Иене вышел очередной номер «Литературной газеты». Мало кто в тот день обратил внимание на заметку «Новое открытие», подписанную К. Ф. Гауссом из Брауншвейга, студентом Геттингенского университета. А открытие действительно было новое и замечательное.

«Всякому начинающему геометру известно, — писал Гаусс, — что можно геометрически (то есть циркулем и линейкой) строить разные правильные многоугольники, а именно треугольник, пятиугольник, пятнадцатиугольник и те, которые получаются из каждого из них путем последовательного удвоения сторон. Это было известно еще со времен Эвклида, и, как кажется, с тех пор господствовало убеждение, что область элементарной геометрии дальше не распространяется. По крайней мере я не знаю удачной попытки распространить ее в эту сторону. Тем более кажется мне заслуживающим внимания открытие, что, кроме этих правильных многоугольников, может быть геометрически построено еще множество других, например семнадцатиугольник. Это открытие является собственно лишь следствием одной еще не совсем законченной большой теории. Как только она получит законченность, она будет предложена публике».

Спустя пять лет все математики увидели, на что способен этот юноша: двадцатичетырехлетний Гаусс выпустил в свет фундаментальный труд «Арифметические исследования», последний раздел которого составляла теперь уже широко разработанная теория деления круга.

Сам Гаусс всю жизнь считал эту теорию своим большим достижением. То юношеское исследование оставалось любимейшей его работой. На надгробном памятнике великого математика выгравирован вписанный в круг правильный семнадцатиугольник: такова была воля Гаусса.

Словно волшебный сосуд, был он до краев наполнен бесценным содержанием: замыслы одних открытий, свершения других, предчувствия третьих... И, как в сказке, не иссякал этот волшебный сосуд, хотя щедро отдавал заключенные в нем богатства. Гаусс всю жизнь творил без отдыха, без пауз. Куда бы ни обращал он свой взор, он видел то, чего не видели до него другие. Что бы ни приковывало его внимание, всегда и во всем умел он сказать новое значительное слово.

А внимание его останавливалось на нерешенных вопросах едва ли не из всех областей точных наук.

В творческой жизни Гаусса получалось так, что начинал он почти всегда с разрешения частных практических задач. Но всякий раз частное решение вырастало у него в глубокое, всеобъемлющее исследование.

...Наступившему девятнадцатому веку наука сделала хороший подарок. В первую ночь 1801 года итальянский астроном Пиацци открыл между орбитами Марса и Юпитера маленькую планету. Он назвал ее Церерой в честь мифической богини плодородия и земледелия. Астрономы с интересом стали наблюдать за движением новоявленного члена солнечной семьи. Но вскоре Церера приблизилась к Солнцу, и яркие лучи скрыли ее.

Спустя некоторое время новая планета опять должна была появиться на небосводе. Однако тщетны были все поиски астрономов: Церера исчезла, словно ее прогнали соседи — могучий Юпитер и грозный Марс.

Тогда этим странным событием заинтересовался Гаусс. Он внимательно изучил все наблюдения Пиацци за движением планеты. И увидел, что трех надежных наблюдений совершенно достаточно для правильного расчета любой орбиты. Гаусс рассчитал путь Цереры и указал астрономам ее точное местоположение. Маленькая планета была вновь открыта.

Эта работа впервые принесла молодому математику всемирную славу.

Вскоре, в 1802 году, немецкий астроном Ольберс, близкий друг Гаусса, открыл еще одну малую планету — Палладу. (Сейчас таких небесных тел — астероидов — известно уже несколько тысяч, а всего их в нашей Солнечной системе, по расчетам астрономов, тысяч около пятидесяти). Орбита Паллады тоже была вычислена Гауссом по его методу трех наблюдений, с тех пор получившему широкое применение. Но движение Паллады оказалось более сложным, чем думалось сначала, потому что она испытывала сильное возмущающее действие больших планет. Разумеется, новая проблема сразу же привлекла внимание Гаусса: несколько лет изучал он эти возмущения.

Двадцать лет отдал Гаусс астрономии. Попутно он разрешил много чисто математических задач, которые вставали перед ним при астрономических исследованиях и расчетах.

Потом на смену астрономии пришла геодезия. Ганноверскому королю понадобилась подробная карта его владений. Гауссу ничего не оставалось, как принять предложение возглавить геодезическую партию. Но таков уж был склад ума Гаусса, его способность к широкому научному мышлению, что и эта сугубо практическая, изнурительная работа, отнимающая массу времени и сил, принесла блестящие плоды для науки.

Гаусс создал высшую геодезию — дисциплину, до тех пор не существовавшую. Он глубоко разработал теорию поверхностей, на столетие предопределив развитие этой важнейшей отрасли математики. И снова попутно он придумал и разработал ряд методов, которые потом стали широко использоваться математиками.

Простой пересказ всего, что сделал Гаусс, потребовал бы многих страниц. Он строил электромагнитный телеграф, изучал явления земного магнетизма и в результате выпустил две важные работы: сочинение по теории потенциала и «Общую теорию земного магнетизма». Он раздумывал над основными проблемами механики. И на свет появился принцип Гаусса, или, как он его назвал, «принцип наименьшего принуждения», выражающий одну из главных закономерностей движения системы материальных тел. Все это были основополагающие проблемы для науки того времени.

Уже современники Гаусса поражались его разносторонности, глубине его математического мышления, способности не только идти в ногу с веком, но и опережать свое время, ставить перед наукой все новые и новые вопросы.

Еще больше изумлены были последующие поколения, когда в посмертно опубликованных дневниках, записях и переписке Гаусса открылся неисчерпаемый запас идей, ждавших дальнейшей разработки, и замыслов, готовых к воплощению. Многие прежде неизвестные исследования оказались доведенными почти до конца, другие существовали только в набросках. Да, недаром уже при жизни Гаусса его называли первым математиком мира и королем математики. Титул, унаследованный, а не заслуженный, как показывает история, чаще всего достается людям слабым и ничтожным. Титул, подобный тому, каким почтили ученые Гаусса, свидетельствует о великих заслугах, об уважении и признательности человечества.

И когда мы говорим, что Гаусс заключал в себе волшебный сосуд, из которого мировая наука десятилетиями черпала соки для своего роста, в этом нет ни малейшего преувеличения. Но нет преувеличения и в том, что через всю жизнь Гаусс нес этот сосуд своего творчества с превеликой осторожностью, избегая малейших толчков и сотрясений из страха расплескать хоть каплю драгоценной влаги.

А время было не просто неспокойное — время было бурное, грозовое. Не слабые толчки, а мощные землетрясения колебали почву старой Европы. За громовыми раскатами французской революции началась многолетняя драматическая эпопея наполеоновских походов, когда трещала по швам многократно перекраиваемая карта Европы: разрушались и вновь создавались большие и малые государства — королевства, княжества, республики... А потом на горизонте появились всполохи грядущих революций. Как две взрывные волны, прокатились по континенту революционные события сначала тридцатого, затем сорок восьмого годов...

И трудно было спрятаться от этих исторических бурь тем, кто жаждал тишины и покоя, бессмысленно было затыкать уши ватой в надежде заглушить раскаты грома. В самом центре Европы крепостные стены несметного множества германских государств не могли защитить своих бюргеров от великих потрясений. Стены эти рушились и рассыпались — где им было устоять против таких натисков!

И правда, вспомнить только, что̀ представляла собой Германия на рубеже двух веков: без малого триста государств-княжеств... И всюду свои законы, свой деспот-властитель, своя система жесточайшего феодального и всяческого угнетения. Как говорил Лассаль, такие мелкие участки земли не мог продуть сквозной ветер истории. Наполеон, разгромив Австрию, ликвидировал целых сто двенадцать мелких государств! Но и после этого их осталось еще предостаточно; Германия продолжала пребывать в раздробленном и разобщенном состоянии. И подданный каждого из этих маленьких самостоятельных государств, будь он крупнейшим ученым, музыкантом, писателем, художником, будь он гением и славой человечества, — все равно продолжал оставаться вассалом своего господина. Он зависел материально от королевского двора; он был не свободен в своих поступках — даже в передвижении по стране; его всегда могли унизить и снисходительно превращали в забаву и украшение двора.

«Трудно найти в мировой истории класс, который был бы так беден духом и силой и так чрезмерно богат человеческими низостями, как класс немецких князей с пятнадцатого и до восемнадцатого столетия», — писал Франц Меринг. Князья и короли девятнадцатого века были немногим лучше. И каждый из них еще стремился стать по меньшей мере королем-солнцем. Но истинное сияние исходило не от них. Получалось так, что в этих карликовых дворах словно царствовала геоцентрическая система Птолемея: вокруг маленькой, мнимо великой, блистающей отраженным светом планеты вращалось огромное светило, щедро озаряющее своими лучами все вокруг. Таким светилом был Бетховен в Вене, Гёте — в Веймаре, Гаусс — при ганноверском короле...

Трагической была жизнь Бетховена. Но его мощный дух бунтовал, жаждал свободы. Бетховен мог бросить князю Лихновскому гордые слова:

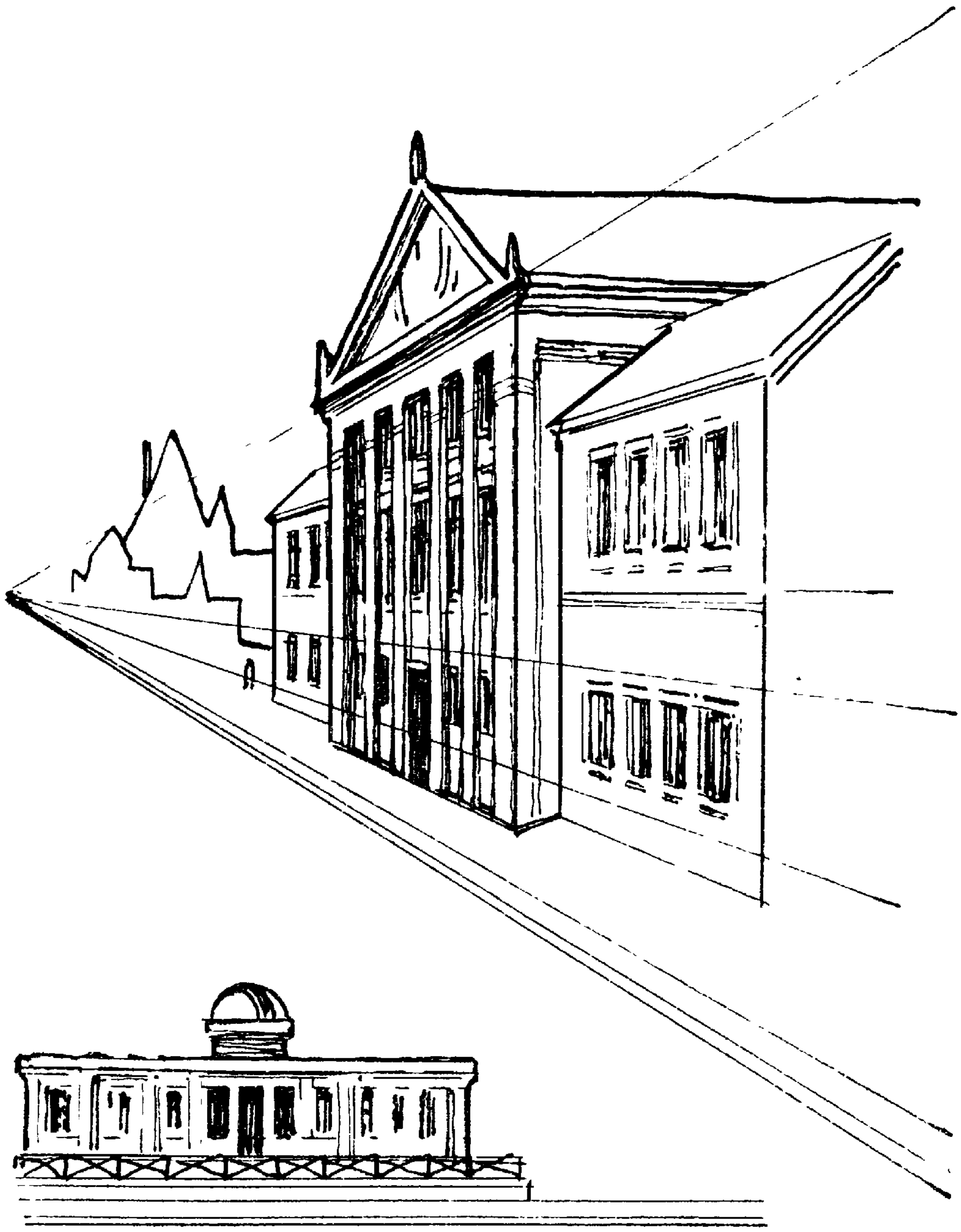
— Князь, тем, чем вы являетесь, вы обязаны случайности рождения. Тем, чем я являюсь, я обязан самому себе. Князей тысячи, Бетховен только один.

Дух Гаусса был робок и слаб. Гаусс тоже мечтал о свободе, прежде всего о свободе творчества, но, как птица, выросшая в неволе, он в глубине души страшился возможной свободы, боялся остаться без покровителя, без привычной опеки.

В каждой из трех судеб — и Гаусса, и Лобачевского, и Бояи — была своя трагедия. Трагедия Гаусса заключалась в том, что он, человек высокого полета и высшей смелости мысли, мирился с унизительной, почти рабской зависимостью от полуграмотного, чванливого властителя, подданным которого состоял. Ему были даны орлиные крылья, а он всю жизнь боялся их расправить, опасаясь обломать их о прутья тесной клетки. Вырваться вон из клетки на вольный воздух он не решался: надо было оставить позади привычное тепло, расстаться, хотя бы на время, с устойчивым, не подверженным случайностям существованием. Для этого он не находил в себе сил.

Трагедия Гаусса, вероятно, и им самим не осознаваемая до конца, была не только в скрытом конфликте с невежественным деспотизмом и в несостоявшихся столкновениях с ним; она таилась в душе самого Гаус-

Карл Фридрих Гаусс.



Геттинген.
Университет. Обсерватория.

са, в его отношении к окружающему миру. В нем самом было заложено глубочайшее противоречие между смелым научным мышлением и сковывающим волю робким общественным темпераментом, между гениальным умом и лишенным мужества сердцем. И если Гаусс-ученый, Гаусс-мыслитель был детищем революционных бурь своего века и достоянием всемирной культуры, то Гаусс-человек оказался крепко запутанным в сетях мещанского консерватизма своей противоречивой эпохи. Гаусс боялся «крика беотийцев», боялся «ос, которые поднимутся над головой». Забота о себе, тревога за свое спокойное существование, без бурь и потрясений, не покидали Гаусса всю жизнь. Достаточно прочитать его откровенные письма к Фуссу, российскому академику, чтобы понять характер короля математики.

В 1801 году Гаусс состоял приват-доцентом Брауншвейгского университета с месячным окладом в 8 талеров. Эта сумма была явно недостаточна для безбедного существования. Академик Фусс, с которым Гаусс находился в переписке, предложил ему переехать в Петербург и пообещал в этом случае избрание в действительные члены императорской академии. Гаусс с удовольствием принял приглашение, но, как человек в высокой степени добросовестный, сказал, что сперва изучит русский язык, и тотчас начал усиленно им заниматься.

Прошел год. Фусс повторил приглашение. Оно было уже совсем принято, когда об этом случайно узнал эрцгерцог Брауншвейгский. Из своей королевской шкатулки он положил Гауссу годовое жалованье в 400 талеров, чем поставил ученого в затруднительное положение. Возникшая арифметическая задача оказалась совсем не простой.

Раздираемый сомнениями, Гаусс спрашивал совета у своего бременского друга, астронома Ольберса:

«Академия наук в Петербурге недавно предложила мне место астронома и директора обсерватории с квартирой, жалованьем в 1000 рублей и обещанием в дальнейшем улучшить условия. Я еще не решил окончательно, приму ли я это приглашение. С одной стороны, практическая астрономия доставляет мне много удовольствия, а то, что в Петербурге недостаточно хороший климат, само собой приведет к тому, что мне не придется много заниматься наблюдениями, значит останется достаточно времени для теоретической работы. Там у меня будет гораздо больше возможностей для работы в различных областях и для глубоких исследований, которые не найдут издателя в Германии. У меня мало надежды достичь в Германии соответствующего моим желаниям приличного положения, потому что к преподавательской деятельности у меня нет ни малейшей склонности. С другой стороны, мне очень не хочется покидать Германию, а все возрастающая дороговизна в Петербурге заставляет меня опасаться, что 1000 рублей будет стоить там не больше, чем 400 талеров в Брауншвейге. Я также не знаю, даст ли мне согласие наш герцог, от которого я полностью завишу. Мне очень хотелось бы услышать Ваш ответ. Прежде всего прошу, чтобы это сообщение осталось полностью между нами».

Ольберс не рискнул дать Гауссу никакого определенного совета. 20 октября 1802 года Гаусс сел, наконец, за ответ Фуссу.

«Многоуважаемый господин статский советник! — начал он. — Ваше почтенное письмо от 5 сентября, полученное мною 6 октября, обязывает меня начать мой ответ с изъявления самой сердечной и горячей благодарности за оказанное мне Императорской Академией Наук доверие, так же как и за благосклонное и лестное мнение, которое Вы высказали по отношению ко мне и которому я обязан этим доверием...»

Гаусс отложил перо в сторону и вздохнул:

— Allein aber ich bin nicht ganz frei...— произнес он вслух и тут же написал эту фразу:

«Однако я не вполне свободен. У меня есть обязанности, большие обязанности — по отношению к моему отечеству и по отношению к нашему благородному государю. Его великодушие создало мне удовлетворительное положение, при котором я могу предаваться моим склонностям. Если сравнить сумму с суммой, то, во всяком случае, те условия, которые мне предлагает Академия, значительно превосходят мое обеспечение здесь. Впрочем, при большой дороговизне в С.-Петербурге и при ценах, несравненно более высоких, чем здесь, эти условия будут весьма мало превосходить мое здешнее обеспечение.

Я предоставляю Вам самому, милостивый государь, решить, не подвергну ли я себя упреку в неблагодарности и равнодушии к своему отечеству, если я откажусь от выгод, предоставленных мне столь великодушно и вполне добровольно нашим государем, не улучшив при этом значительно своего положения».

Гаусс задумался на минуту, потом для большей убедительности подчеркнул последние слова.

«При таких обстоятельствах, — продолжал он, — я вынужден предоставить Императорской Академии решить, может ли она улучшить эти предлагаемые ею условия и тем самым обеспечить мне такое положение, при котором я мог бы считать себя вознагражденным за пожертвование отечеством, его нежным небом, преимуществами, которыми я здесь пользуюсь, и всем, что мне в нем дорого...

Карл Фридрих Гаусс».

Читая это письмо, невольно вспоминаешь слова, сказанные Энгельсом о другом великом человеке, соотечественнике Гауссе — о Гёте:

«...в нем постоянно происходит борьба между гениальным поэтом, которому убожество окружающей его среды внушало отвращение, и осмотрительным сыном франкфуртского патриция, достопочтенным веймарским тайным советником, который видит себя вынужденным заключить с этим убожеством перемирие и приспосабливаться к нему. Так, Гёте то колоссально велик, то мелок; то это непокорный, насмешливый, презирающий мир гений, то осторожный, всем довольный, узкий филистер».

...Прошло еще четыре года. Войска Наполеона почти беспрепятственно занимали одно немецкое государство за другим, и Гаусс вспомнил о старом предложении. Он первым написал Фуссу:

«Эта роковая война сразу изменила положение вещей. Кто только может предвидеть, как далеко распространятся ее последствия, и не предстоят ли всякие перемены также в нашей до сих пор столь благословенной стране...»

Ответа на это письмо Гаусс почему-то не получил.

Противоречивая натура Гаусса сказалась и в его научной жизни. Это удивительно любопытный характер. С одной стороны, боязнь даже намека на публичную огласку его смелых идей. С другой стороны, постоянное подчеркивание в письмах своего приоритета.

Так было не только с Яношем Бояи, Швейкартом, Тауринусом. Точно так же вел себя Гаусс и по отношению к Абелю — выдающемуся норвежскому математику, автору теории эллиптических функций, как и младший Бояи мало оцененному при жизни. Какое поразительное сходство существует между письмами Гаусса по поводу открытия неэвклидовой геометрии и по поводу открытия Абеля!

«Другие занятия помешали мне обработать эти исследования, — писал он во Францию. — Абель предвосхитил почти треть моих результатов. Он пошел по пути, которому я следовал уже с 1798 г. Я не удивляюсь поэтому, что он достиг большей части тех же результатов. Так как, однако, в своей дедукции он проявил столько таланта и изящества, то я освобожден от необходимости обрабатывать собственные результаты».

Это письмо возмутило французских математиков.

Наконец, Лежандр решил внести ясность в вопрос о том, кого же следует считать действительным автором каждого нового завоевания в науке.

«Не существует открытия, — писал Лежандр, — которое нельзя было бы приписать себе, сказав, что те же вещи были найдены на несколько лет раньше; но если не дать тому доказательства, состоящего в указании места, где они опубликованы, это утверждение становится беспредметным и представляет собой только обиду для истинного автора открытия.

В математике случается очень часто, что находят те же самые вещи, которые уже были открыты другими и которые уже известны; подобное случалось со мной много раз; но я никогда не упоминал о них и никогда не называл «нашим принципом» принцип, который другой опубликовал ранее меня».

Гаусс словно чувствовал себя живущим одновременно и в настоящем и в будущем.

Сегодня, сейчас, пусть будет спокойствие, слава, ничем не поколебленная репутация первого математика мира, короля, далекого, упаси боже, от революционных идей даже в науке...

«Про Юпитера, которого Фидий изобразил сидящим на Олимпе, говорили, что если бы он вдруг встал, то проломил бы свод храма. Таким же было положение Гёте в Веймаре: если бы, желая выйти из своего сидячего спокойствия, он вдруг выпрямился во весь рост, то продавил бы крышу государства или, что еще вероятнее, разбил бы себе при этом голову. Немецкий Юпитер продолжал спокойно сидеть и спокойно позволял поклоняться себе и курить фимиам».

Это сказал Гейне.

«Точно так же и Юпитер-математик предпочитал спокойно сидеть на стуле и не стремился разрушить старую крышу науки с риском расшибить себе голову»,— сказал о Гауссе математик Имре Тот.

Как тут не вспомнить стихи Петефи:

На дряхлый дом наш мир похож —
Стропила оседают низко...
Друг, слишком гордо ты идешь.
Согнись! Тогда не будет риска!
Не смогут голову пробить
Ветшающие перекрытья...
«Готов я голову сломить...
Но горбясь не хочу ходить я!»

Под такими строками подписался бы Янош Бояи, современник и единомышленник Петефи. Янош Бояи, но не Гаусс.

Так жил Гаусс в настоящем. А в будущем? Грядущая слава провозвестника смелых идей — а он верил в торжество этих идей, иначе не был бы всякий раз столь настойчив в утверждении своего первенства — тоже должна принадлежать ему! К этому он стремился.

Естественно возникает вопрос: действительно ли Гаусс создал неэвклидову геометрию, и притом, как неоднократно говорил он, значительно раньше, чем Лобачевский и Бояи?

Мы помним его замечательное письмо к Тауринусу: оно показывает, что Гаусс владел существенными идеями неэвклидовой геометрии. Но то были лишь отрывочные заметки и наброски, хотя и очень содержательные. И вовсе не сразу и не без оглядки вступил Гаусс на новую землю.

Сомнения в самой возможности существования геометрии, отличной от эвклидовой, одолевали Гаусса не один десяток лет.

В конце 1804 года в письме к Фаркашу он еще обсуждал пути доказательства пятого постулата, еще верил, что его можно доказать:

«Твой метод меня тоже не удовлетворяет, — писал Гаусс. — Я хочу со всей возможной ясностью представить себе тот камень преткновения, который нахожу в нем (и который принадлежит к той же группе подводных камней, на коих терпят крушение и мои попытки). Однако я продолжаю надеяться, что некогда, и еще до моего конца, эти подводные камни позволят перебраться через них».

И позже — через два, через четыре года, через восемь и четырнадцать лет — он вновь и вновь повторяет: «В теории параллельных линий мы до сих пор не опередили Эвклида».

«Мы не продвинулись дальше того места, где был Эвклид 2000 лет тому назад».

Значит, уверенности в том, что допустима неэвклидова геометрия, у Гаусса тогда еще не было.

Потом такая уверенность у него появилась, колебания исчезли, но до настоящей математической разработки новых идей Гаусс не дошел ни к 1826 году, когда Лобачевский уже читал свой доклад на Совете Казанского университета, ни к 1832 году, когда Янош Бояи издал свой «Аппендикс», ни позже этих исторических дат. В 1829 году Гаусс, как мы помним, писал Бесселю:

«Вероятно, я еще не скоро смогу обработать свои пространные исследования по этому вопросу, чтобы их можно было опубликовать». «Пространные исследования» продолжали оставаться заметками, набросками, размышлениями от случая к случаю.

А в это время в «Казанском вестнике» уже печатался первый мемуар Лобачевского «О началах геометрии».

В мае 1831 года в письме к своему другу астроному Шумахеру Гаусс рассказал, что приступает, наконец, к работе над сочинением по неэвклидовой геометрии:

«Вот уже несколько недель, как я начал излагать письменно некоторые результаты моих собственных размышлений об этом предмете, занимавших меня сорок лет тому назад и никогда мною не записанных, вследствие чего я должен был три или четыре раза возобновлять весь труд в моей голове. Мне не хотелось бы, однако, чтобы это погибло вместе со мной».

Перед глазами Гаусса был план и общий вид того, что нужно было построить. Представлял он и то, как отдельные камни, отдельные части будут сочетаться друг с другом в будущем здании, но строить его он так и не стал.

То, что оставил Гаусс, оказалось лишь наметкой основных идей новой науки. Сделанное им в этой области просто нельзя ставить в один ряд с работой Бояи, который написал капитальный труд, тщательно построенный, со строгой системой доказательств, труд, содержащий элементарную неэвклидову геометрию и тригонометрию.

И уж, конечно, сделанное Гауссом невозможно даже сравнить с творением Лобачевского, который не только заложил фундамент, но и воздвиг на нем многоэтажное здание: он присоединил к элементарной геометрии неэвклидова пространства аналитическую и дифференциальную неэвклидовы геометрии.

Когда новая великая идея не только возникла, но и получила строгое, убедительное оформление, и больше того — мировое признание, всегда интересно найти и проследить генезис ее, выяснить, как исторически складывалось дело. Лишь для того, чтобы это узнать, а вовсе не для умаления чьих-то заслуг, скрупулезно роешься в документах, свидетельствах, сопоставляешь даты... Чтобы узнать, как, какими дорогами и тропинками шло развитие человеческого духа.

Тут-то и обнаруживается, как много есть мудрых и проницательных людей. А может, весь секрет в том, что фиалки, как говорил Фаркаш Бояи, расцветают повсюду, когда наступает их срок.

— Я совершенно не понимаю, почему меня превозносят как создателя теории относительности, — часто повторял Эйнштейн своим друзьям.— Не будь меня, через год это сделал бы Пуанкаре, через два года сделал бы Минковский, в конце концов больше половины в этом деле принадлежит Лоренцу. Мои заслуги здесь преувеличены. Что же касается теории тяготения, то я почти уверен, что если бы не я, то до сих пор ее никто бы не открыл.

Глава московских физиков академик Мандельштам, вместе со своим другом академиком Ландсбергом открывший комбинационное рассеяние света одновременно с индийским физиком Раманом, говорил:

— Не важно, кто сделал дело, важно, что дело сделано.

Но человечеству не безразлично, кто сделал. Потому что великие люди, так же, как и великие деяния, и есть то, что в большой степени наполняет содержанием, составляет историю человечества.

Может быть, это очень отчетливо понимал Гаусс. Он не слишком искал прижизненной славы. В жизни он больше ценил спокойствие. Но зато немалые его заботы были направлены на то, чтобы в пантеоне бессмертных обеспечить себе побольше места.

Часто бывает, что идея зарождается в одном великом уме, неясная еще, не оформленная. Потом от человека к человеку она зреет, мужает, обрастает плотью и, наконец, в чьих-то руках получает наиболее совершенное выражение. И с этим именем она связана уже навсегда в истории человечества. Так теория относительности всегда будет теорией Эйнштейна, а эволюционное учение — учением Дарвина. И это происходит не только в науке. Многие писали о легендарном докторе Фаусте, но имя Фауста навсегда связано с Гёте, а история Гамлета, принца датского — с Шекспиром. Тут дело не в приоритете в мелком понимании этого слова.

Не в этом дело и сейчас, когда рассматривается история возникновения неэвклидовой геометрии. Не вызывает ни малейшего сомнения абсолютная самостоятельность и самобытность мышления каждого из этих великих ученых — «гениев первой величины». И их контакт, к сожалению, не состоявшийся, только обогатил бы науку, ускорил ее поступательное движение.

Гаусса становится даже жаль, — ученому невозможно таить про себя открытие и оставлять его лишь на суд потомкам. Так важно сразу услышать живой отклик. Но тогда остается только писать письма верным друзьям. И не забывать предостерегать их: об этом ни слова вслух.

Конечно, хочется, чтобы великий ученый был и великим человеком. Мы часто закрываем глаза, сознательно или бессознательно, на маленькие или большие слабости гения. Но слабость Гаусса не лежала, к сожалению, в стороне от главного, что составляло его жизнь. Поэтому умолчать о ней было бы просто нечестно.

«Я пожертвовал многим, но не отвагою знания», — писал Герцен. Гаусс, один из вернейших жрецов в храме науки, однажды согрешил: побоявшись пожертвовать покоем, пожертвовал «отвагою знания».

Гаусс ревниво оберегал свою грядущую посмертную славу. И памятники ему воздвигнуты по праву. Но Гаусс пытался при жизни заготовить мраморные плиты еще для одного памятника, которого не заслужил, — для памятника себе как творцу неэвклидовой геометрии. Он никогда не будет ему поставлен. Потому что честь эта принадлежит другим.

И прежде всего человеку, который первым возвестил о новой науке, а потом тридцать лет развивал и совершенствовал ее, не помышляя о славе, который возвысил математику, никогда ни единым словом не пытаясь возвысить самого себя, — Николаю Лобачевскому.

Янош Бояи

Как непохожа трудная судьба Яноша Бояи на спокойное течение жизни геттингенского олимпийца! Впрочем, Янош и сам никогда не искал покоя. Мятежный, он искал бури: жаждал революционных гроз, которые очистили бы затхлый воздух Австро-Венгерской монархии.

Необычайная жизнь и незаурядный характер Яноша Бояи привлекли к нему внимание и современников и потомков. Но как долго был искажен его образ!

...Дуэлянт и скандалист, на каждом шагу бросающий вызов общественному мнению; мрачный мизантроп, у которого нет никаких привязанностей, для которого нет ничего святого; сумасшедший математик, изобретающий фантастические теории, в которых не может разобраться даже уважаемый профессор, его отец, — таким представлялся Янош Бояи большинству современников. И эта репутация пережила его: она сохранялась за ним в течение многих десятилетий и после его смерти.

Неэвклидова геометрия уже начала завоевывать мир; на родине Бояи уже поняли, какой крупный ученый их соотечественник; но вымыслы и легенды, порочащие его имя, все не уступали место действительному изучению трудов и жизни гениального математика. А был он не только выдающимся ученым, но и борцом за свободу, за всеобщее счастье. Таким был подлинный Янош Бояи со всей его болью, с его горячим и чистым сердцем, с его преданной любовью к людям.

Мысли и чаяния Яноша, которые он в глубоком одиночестве мог поверять только бумаге, были тщательно запрятаны и похоронены в тайниках архивов, чтобы, не дай бог, кто-нибудь не напал на их следы. Этому можно не удивляться. Его огненные слова звучали, как набат.

Он сам сознавал это. И верил, быть может, несколько наивно, что если слова его будут услышаны, то «все тираны побледнеют и почувствуют, как зашатался их трон, и это испугает их больше, чем весть об армии могучей державы, приближающейся к их границам. Эти слова будут для тиранов так вески и так пугающи, что коронованные властители с совестью, отягощенной злобой и грехом, тут же лишатся мужества и покроются мертвенной бледностью, как при трубном гласе страшного суда».

Только в наши дни математикам Венгрии и Румынии — частью последней стала теперь Трансильвания, родина Бояи, — удалось с большим трудом разыскать многочисленные неопубликованные сочинения и записи Яноша. Так впервые зазвучали в полную силу его слова любви к простым людям и его гневные обличения всяческой тирании.

— Аристократия, бюрократия, камарилья, реакция идут к своей гибели, и больше ничто не в состоянии предотвратить их уничтожение! — пророчески говорил Бояи в канун революции сорок восьмого года.

«Аристократия, слава богу, выходит из моды, исчезает, как туманная картина в волшебном фонаре, — писал он позже. — Но некоторые говорят, что денежная аристократия никогда не выйдет из моды. А я утверждаю, что мы можем питать большую надежду на то, что исчезнет и денежная аристократия, то есть прежде всего злоупотребление властью денег, преклонение перед золотом».

Янош Бояи думал так не только наедине с самим собой. В общении с сильными мира сего он был дерзок и смел, как и в науке. Его острословие приводило в ярость богатых бездельников.

— Бык останется быком, даже если его и привезут в Вену! — саркастически бросал он, глядя на молодых аристократов, отправлявшихся в европейские столицы за образованием и лоском.

— Ведь до сих пор культура не жила подле полных сундуков богачей, — говорил он тем, кто прикрывал свой страх перед народом фразами о защите культуры.

Да, у высшего общества Марошвашархея были серьезные основания ненавидеть Яноша Бояи. Аристократы крови и аристократы денег объявили его сумасшедшим. Глухой стеной вражды и молчания окружили они Яноша. Упорно, но безуспешно пытались они лишить его возможности заниматься наукой. Это не удалось. Но зато вполне успешно они лишили Яноша средств к существованию. Даже на покупку чернил и перьев у него часто не бывало денег. Он писал гусиными перьями, а чернила делал сам — из травы. За долгие годы Янош Бояи не смог скопить необходимой суммы, чтобы военное начальство разрешило ему жениться, — а такое разрешение требовалось законами того времени, — и он должен был страдать из-за судьбы своих детей, рожденных вне освященного церковью брака.

...Он влачил одинокие дни в Домальде, где когда-то так счастливо началась его жизнь. Живая прелесть природы больше не успокаивала его измученную душу. Начались припадки меланхолии — дала себя знать тяжелая наследственность, усугубленная тяготами существования.

Временами Янош переселялся в Марошвашархей, где по-прежнему жил старый Фаркаш. Но и встречи с отцом радости не доставляли. Им было трудно друг с другом, они часто ссорились, и однажды дело чуть не дошло до дуэли. Кончилось тем, что, живя в одном городе, отец и сын перестали встречаться. Только изредка переписывались они, обсуждая в письмах исключительно вопросы математики.

Янош никогда не мог простить отцу, что тот не захотел разобраться в его геометрии, не понял и не поддержал его идей.

Так не хотелось бы тревожить добрую память старого профессора, но нельзя не сказать, что поведение Фаркаша Бояи вызывает глубокое и горькое недоумение.

Почему он, после того как его старый друг подтвердил истинность открытий Яноша, не постарался сам вникнуть в их существо? Кто, как не он знал всегдашнюю сдержанность Гаусса! Значит, мог бы он понять из Гауссова письма, что открытие его сына — действительно переворот в науке, что Янош нашел, наконец, выход из того омута, в котором некогда захлебнулся он сам, Фаркаш! Старый Бояи был талантливым и образованным математиком, а Гаусс был для него непререкаемым авторитетом. Как же мог он не задуматься серьезно над тем, что произошло? Он, который «прошел этот страшный путь до конца и изведал мрак ночи...» Почему Фаркаш остался бесстрастным посредником в отношениях между сыном и Гауссом, хотя видел, как сильно ранило Яноша поведение Гаусса?

Фаркаш все простил Гауссу и преданно любил его до конца своих дней. Может быть, он любил в нем свою молодость, былые юношеские надежды... Но ведь и сын был для него всем в жизни — его гордостью и надеждой! Почему же не слил он своих усилий с усилиями Яноша? Если он не мог соединить своих способностей с гением сына, то почему не стал для него хотя бы надежной опорой?

Где искать ответа на все эти вопросы?

Вспомним слова Фаркаша:

— Огонь моей любви к математике погас...

Представьте себе человека, целиком отдающегося одной страсти; если на долгом жизненном пути он сталкивается в своих устремлениях только с горьким разочарованием, неудачи и удары судьбы постепенно иссушают его душу, и когда, наконец, приходит страстно желаемое, чего жаждал он всю жизнь, в душе его царят уже пустота и холод.

От прежней любви к математике остался один пепел... Не потому ли Фаркаш не сделал даже попытки понять сына? Открытие Яноша пришло слишком поздно. И, может быть, правильнее всего только пожалеть старого Фаркаша.

Была, вероятно, и еще одна причина его безучастности. Потратив столько лет на безрезультатные поиски доказательства рокового постулата, старый Бояи в глубине души еще верил, такое доказательство все-таки должно существовать. Поэтому путь отрицания пятого постулата был для него попросту неприемлем! И ничто — ни преклонение перед Гауссом, ни любовь к сыну — не могло поколебать этой его внутренней фанатической убежденности, в которой, быть может, он не признавался даже самому себе.

Всю долгую жизнь Фаркаш метался от одного занятия к другому, растрачивая свои богатые и разносторонние способности. С горечью и болью Янош как-то сказал:

— Он мало сделал для человечества. Он бесцельно прожил свою жизнь.

Бросить подобный упрек самому себе Янош не мог, хотя нашлись люди, которые и про него осмелились сказать те же слова.

Вынужденный жить отшельником, он в глубоком уединении мечтал о счастье народа и неустанно искал пути к достижению этой цели. Он не остановился бы и перед самопожертвованием. «Если бы я имел больше, чем одну жизнь, то для всеобщего блага я с радостным сердцем отдал бы все жизни, сколько бы их у меня ни было, одну за другой», — так в разгар революции сорок восьмого года писал Янош в докладной записке народному депутату Шандору Добои.

Революция возродила силы и надежды Яноша Бояи. То, что столько лет лежало под спудом, казалось, могло теперь выйти наружу. Его жизнь могла, наконец, влиться в общий поток революционного движения. И Янош рвался к действию.

...Трансильвания — чего только не пришлось ей испытать!

Страна лежала распластанная и придавленная обычной для тех времен и поистине страшной пирамидой угнетения. Венчал пирамиду австрийский император, одновременно занимавший и королевский престол Венгрии. Пониже, в Колошваре, сидел местный трансильванский князь со своими приближенными. Для удовлетворения их ненасытных потребностей из последних сил трудилась вся провинция. От австрийцев старались не отставать венгерские крупные феодалы и мелкопоместные дворяне. Никто не уставал выжимать соки из нищего народа!

— Как они не стыдятся, не стесняются, почему не краснеют до ушей, почему они так толстокожи, наши молодые господа с белой кожей и их изящные дамы, почему не испытывают они угрызений совести и чувства унижения от того, что ведут жизнь бездельников!.. Жить за счет других, чтобы другие для тебя проливали пот, это стыд, позор и больший грех, чем воровство! — возмущался Янош, называя противоестественной бессмыслицей и несправедливостью «право» богатых присваивать себе плоды труда других людей.

А у подножия пирамиды, в массе простого народа, не было ни единства, ни согласия.

Среди крестьян и ремесленников бедность была совсем не одинакова. Эта пестрота имущественного положения вызывала раздоры — делала врагами тех, кто должен был бы выступать как союзники.

Но и это еще не все. Между венграми и румынами, населяющими Трансильванию, шла жестокая, часто кровавая борьба; габсбургская Вена неусыпно следила за тем, чтобы не ослабевали национальные распри.

В глазах австрийцев венгры были низшей расой, варварами, дикарями. Но зато венграм разрешалось точно так же смотреть на румын.

Бояи с жаром восставал против всякого национализма. Он защищал и румын и венгров.

— Что касается нашей славной и дорогой нации, — говорил он, — это верно, — что она лишь недавно пробудилась и начала серьезно развивать науку; но именно это обстоятельство дает нам надежду, что в руках венгерского народа, который обладает талантливостью и большой самобытностью, лучшие семена не пропадут, а пустят корни и вырастет сильное жизнеспособное дерево... Дерево, — добавлял он, вспоминая давние слова отца, — с каждым годом усиливающееся на одно кольцо!

А в разгар вражды между венграми и румынами, спровоцированной императорской камарильей, Янош говорил:

— Никто более меня не любит и не поддерживает румынский народ. По-человечески я люблю румын так же сильно, как и венгров, и с радостным удивлением вижу, что, несмотря на то, что их долго угнетали, они не утратили ни своей жизненной силы, ни способности сопротивляться, ни оптимизма.

В жесточайший разгул шовинистических настроений нужно было обладать широким и щедрым сердцем, чтобы так чувствовать. И быть смелым, чтобы так говорить.

Но Янош мечтал о счастье не только своей страны. «Невозможно жить спокойно и быть счастливым, пока на земле еще живет хотя бы один несчастный... Цель жизни — благоденствие и счастье всего человечества»,— писал он. И дальше: «Наука — сильнейшее средство для достижения этого».

Янош верил в силу просвещения, в действенность науки для народа — науки, которая объяснит мир и поможет его перестроить. И он сам взялся за создание такой науки.

Еще в молодости Янош уверял, что «чувствует в себе силы обучить весь род человеческий». Так представляя себе свою миссию, он приступил к созданию «Allheillehre» — «Учения о всеобщем благе». Реформа человеческого общества, свято верил Янош, в течение нескольких лет уничтожит все страдания на земле и приведет ко всеобщему счастью. Пусть только человечество ему поверит и пойдет за ним!

«Allheillehre» Яноша Бояи — это утопия просветителя. Однако рядом с утопическими замыслами в ней встречаются идеи и научного социализма.

Пусть все принадлежит всем — вот зерно учения Бояи: земля — землепашцам, шахты и соляные копи — горнякам, леса — дровосекам... Каждый получает равную долю общего богатства и имеет равные права. Но, пишет Бояи, «самое лучшее, если бы не делили земли, а вся Земля, со всеми своими водами, со всей атмосферой стала бы общей собственностью, так же как Солнце — источник жизни — общее благо всего человечества».

В свои молодые годы Янош верил в спасительную силу убеждения. Мы видели уже, какое могущество приписывал он словам обличения тиранов. Но, конечно, он не был слеп. Он хорошо понимал, как жадно и цепко, мертвой хваткой, держатся большие и маленькие властители за свои привилегии. И со временем он ясно осознал, что ничего из того, чем они владеют, не уступят они добровольно. Он говорил:

— История не идет путем кротости. Еще потребуется много революций и насилия.

Как и Петефи, Янош Бояи мечтал о времени:

Когда невольники-народы
Терпеть не пожелают боле
Постыдного ярма неволи
И выступят на поле брани
Под красным знаменем восстанья,
И гневом запылают лица,
И на знаменах загорится
Святой девиз: «Свобода мировая!»

И революция пришла.

Вслед за февральским восстанием в Париже началась и в Венгрии мартовская буря сорок восьмого года: поднялся революционный Пешт, а за ним и вся страна.

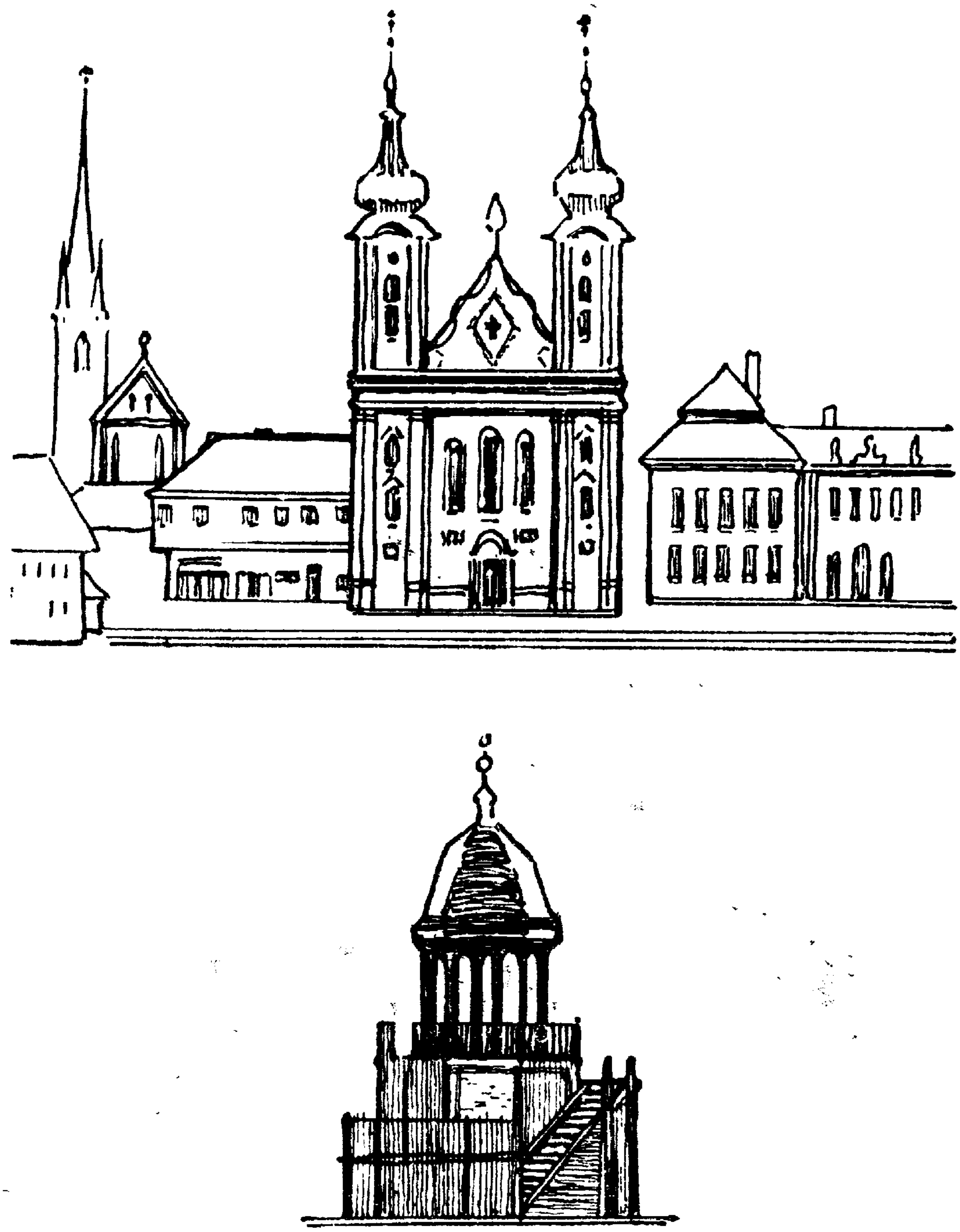
Окрыленный Янош верил, что революция принесет народу освобождение и от габсбургской империи и от отечественных угнетателей — феодалов и буржуа. Прежде всего необходимо немедленно создать революционную народную армию — эта мысль сразу захватила его. И в первый раз он благодарил судьбу за то, что получил военное образование. Однако тяжелая болезнь, гораздо более тяжелая, чем он думал, накрепко приковала его к постели в этот долгожданный час.

«Я совершенно неспособен принять участие в военном походе, — с горечью написал он своим соратникам,— но я буду стремиться к тому, чтобы личным служением способствовать делу всеобщего блага. Я мог бы дать целесообразные предложения для разрешения еще неясных отношений барщины, денежного и налогового вопросов, трудового устройства, регулирования оплаты труда, торговли, системы воспитания и образования и других предметов такого же большого значения».

24 августа 1848 года в журнале «Контролер» появилось открытое письмо одного из участников революции, Даниэля Доша, адресованное «соотечественнику инженеру-капитану Яношу Бояи».

«Бросьте, господин капитан, математику, повесьте на гвоздь вашу скрипку. А саблю, висящую на гвозде, возьмите в руку и выходите на поле битвы. Ваше место в военном министерстве или во главе войск, а не в том

Янош Бояи.



Марошвашерхей во времена Бояи.

углу, где я всегда с сердечной болью видел вас, такого выдающегося человека».

Доша не знал, что в то время Янош, проклиная очередной удар судьбы, лежал совершенно беспомощный, без движения, и мучился от жесточайших болей в почти парализованных ногах.

В октябре 1848 года революционная армия, одерживая победы, готовилась к разгрому австрийских войск подполковника Урбана, расположившихся в городе Сасрегене. Для проведения этой операции было созвано тайное совещание, в котором принял участие и Янош, немного оправившийся от болезни. Трансильванский историограф Фаркаш Деак описал это совещание в своем дневнике.

«Бояи представил ясный, четкий план не только упомянутой уже экспедиции в Сасреген, но и очищения Себена, Фехервара и всей Трансильвании. Автор плана требовал полной самостоятельности и независимости, абсолютного повиновения и самой строгой дисциплины с правом расстрела за каждую кражу или поджог; при этом он обещал передать к новому году всю Трансильванию в руки Венгерского правительства. Этот план не был принят, потому что присутствующие сказали, что Бояи для них малознакомый человек; на самом деле причина была в том, что военные руководители и начальники не захотели выпустить из своих рук командования, стать под начало Бояи, а кроме того, Дрошнер был реакционером, а Жомбори колеблющимся, и эти два военных специалиста постарались провалить самый лучший из возможных планов. Бояи вернулся в свое уединение, из которого вышел только на один момент».

...Венгерская революция 1848 года была наиболее мощной и длительной из всех революций того бурного времени, но и она развивалась с переменным успехом. В январе сорок девятого года австрийские войска захватили Пешт, и центр восстания был перенесен в Трансильванию. Янош Бояи обратился к восставшим через народного депутата Шандора Добои. Эту докладную записку Яноша мы уже вспоминали раньше.

Революционные войска под командованием легендарного героя, польского генерала Иозефа Бема освободили Трансильванию, и вождь венгерской революции Лайош Кошут объявил о лишении династии Габсбургов венгерского престола.

Сердце Бояи снова переполнилось восторгами и надеждами.

Но в это время императору Францу Иосифу удалось привлечь себе на помощь силы извне. Триста семьдесят тысяч штыков монархической коалиции выступили против стопятидесятитысячной революционной армии.

В тяжелые для революции дни, 15 июня 1849 года, Янош пишет Кошуту, избранному Правителем освобожденной Венгрии:

«Наша любимая родина и народ ведут борьбу за свободу, борьбу не на жизнь, а на смерть. И сознание того, что из-за тяжелой болезни я не могу принять непосредственного участия в этой борьбе, еще больше усиливает мои страдания. Особенно тяжело мне потому, что эта война из-за внешнего нападения стала такой несправедливой, какой еще не знала история. В этой борьбе участвуют невиданные герои. Большинство людей в наших полках — борцы, витязи! Несмотря на полную неподготовленность, с голыми руками и пустым карманом, они, под тревожным и сочувственным взглядом Европы, на удивление всему миру, сражаясь с опытным внутренним и внешним врагом, достигли замечательных успехов. Это больше чем восьмое чудо света!»

Прикованный к постели, Янош без устали ищет для себя хоть какой-нибудь возможности участвовать в общем деле. Он вспоминает о письме, полученном им от Шандора Добои. В этом письме, написанном по поручению Кошута, в то время Председателя Комитета обороны, Яношу предлагается сотрудничество в венгерской армии.

«Я никоим образом не желаю навязываться, — со свойственной ему скромностью пишет Янош Кошуту.— Наконец, после долгих раздумий, я нашел для себя самый правильный путь; со всех точек зрения, это самая целесообразная, самая лучшая возможность. Как старый капитан, я хотел бы оказаться на военной службе и прошу поместить меня в один из отделов министерства, при самом правительстве, в качестве советника или секретаря.

Мне все равно осталось мало жить на свете, и, наверное, я уже не смогу сыграть свою роль в политической жизни страны, как, естественно, не мог этого сделать в предшествующую эпоху, когда все духовное было убито и только, как далекие звезды, сверкали идеи правды».

...Мрачная пора наступала снова. При Темешваре, городе-крепости, где начал свою службу Янош Бояи, народные войска понесли поражение, которое оказалось поражением всей революции.

На полях битв рядом с молодыми венграми полегли румынские повстанцы, польские легионеры генерала Бема, рабочие и студенты из австрийского легиона. Всем им земля Трансильвании стала общей братской могилой.

Янош Бояи писал: «Вечная память этим патриотам со светлым разумом, с великой и благородной душой, которые отдали жизнь за святое дело нашей родины, а значит, и за святое дело человечества. Вечная память нашим братьям — людям различных языков, особенно героям немцам из Вены и героям полякам, которые присоединились к нашему делу и протянули нам руку помощи».

В стране наступила тяжелейшая пора реакции. Депрессия и глубочайший мрак воцарились и в душе Яноша Бояи: теперь он ни в чем не видел просвета, ни в чем не мог найти покоя и утешения; в психике его начали проявляться болезненные явления.

Даже в собственном доме он стал чужим. Жена была бесконечно далека от всего, чем жил и что выстрадал Янош. Их совместная жизнь стала невозможной, и они расстались. И в детях не зажглось даже искры, даже отсвета отцовского пламени.

Медленно и трудно угасала жизнь великого человека. И, наверное, его помраченное сознание не предвидело, что пройдет время и он станет славой и гордостью своей страны, любимого им венгерского народа...

К концу жизненного пути Янош остался совсем один. «Он жил как погребенный», — вспоминал очевидец его последних дней. Он умер в 1860 году, на пять лет пережив Гаусса и на четыре года Лобачевского.

Погребение его походило на ритуал забвения. Лишь три человека проводили останки к безымянной общей могиле, а к записи в реформаторской церкви кто-то приписал: «Его жизнь прошла безо всякой пользы»...

Николай Лобачевский

Так печально окончилась жизнь Яноша Бояи, чье детство протекало в атмосфере любви и восторженного удивления перед ранним созреванием его таланта.

Детство Лобачевского было суровым и трудным. Первые шаги и первые детские открытия Николая не встречали внимательных и восхищенных взглядов родителей: все силы семьи поглощала борьба с вечной изнурительной нуждой. Отец, уездный землемер, зарабатывал гроши. На жизнь всегда не хватало.

В 1802 году Прасковья Александровна Лобачевская перевезла семью из Нижнего Новгорода в Казань. Она прослышала, что там вновь открылась гимназия, куда принимали детей не только дворян, но и разночинцев, и отважилась подать прошение о зачислении всех трех сыновей в эту Казанскую гимназию на казенное содержание. Мальчики, в отличие от дворянских отпрысков, отнюдь не проходившие дома усиленной подготовки с гувернерами и репетиторами, сумели успешно выдержать экзамены и ждали решения своей судьбы.

Тот день во всех подробностях навсегда запомнился Николаю.

Дверь отворилась, и в комнату быстрыми шагами вошла Прасковья Александровна. В высоко поднятой руке она держала большой конверт, запечатанный гербовой печатью. Мальчики окружили мать. Она оглядела их, полных ожидания, надежд и тревоги, и протянула конверт старшему.

— Читай, Саша... — попросила она, и в голосе ее явственно слышались волнение и неуверенность, — вдруг отказ!

Александр, волнуясь не меньше матери, стал распечатывать письмо и вытащил толстую, сложенную вчетверо бумагу.

«Из протокола заседания Совета Казанской гимназии, — торжественно начал Саша, — 5 ноября 1802 года. Слушали прошение коллежской регистраторши Прасковьи Александровой дочери, жены Лобачевского, о принятии трех сыновей: Александра одиннадцати, Николая девяти и Алексея семи лет, детей губернского регистратора Ивана Максимовича Лобачевского, в гимназию для обучения на казенное разночинское содержание, а когда нет вакансии, на собственное, со включением их в число кандидатов. Еще представляет сия просительница, что по бедности своей не может ничего взнести единовременно в пользу гимназии. Определено...»

Тут Саша, потрясая бумагой, громко закричал:

— Принять, принять!

Прасковья Александровна шумно вздохнула. Глаза у нее покраснели. Она обняла за узкие плечи старшего сына, заглянула в серые глаза Николеньки, потом прижала к себе маленького Алешу. Мальчики не помнили мать такой счастливой и, как им казалось, красивой и молодой. Она всегда была серьезна и озабоченна.

Теперь, наконец, в их доме наступил праздник. Говорили все сразу, возбужденно, перебивая друг друга.

— Матушка, — воскликнул Алеша, — вы для нас куртки из папашиных мундиров перешивали, а нам в гимназии казенные мундиры сошьют! Из зеленого сукна, с малиновыми воротниками...

— Вовсе не с малиновыми, — перебил всезнающий Николай, — с малиновыми дворяне носят, у нас будут зеленые воротники. Но это ничего...

Ночью Николай долго лежал с открытыми глазами, загадывая, как пойдет у них будущая жизнь.

Потянулись дни учения, долгие и похожие друг на друга.

Братья Лобачевские, как и все гимназисты, помещенные на казенное содержание — казеннокоштные, как они назывались, — жили в гимназии, бывшем губернаторском доме. Красивое трехэтажное белое здание под ярко-зеленой крышей, с колоннами и куполом, стояло на самом гористом месте Воскресенской улицы, и из окон во все стороны был виден город.

Лобачевские быстро втянулись в гимназическую жизнь и сдружились с товарищами. Все, что сначала приводило в удивление и заставляло размышлять, теперь стало привычным. Но сколько тяжелого оказалось в неласковой казарменной жизни!

В гимназии царил дух солдатчины. Строем ходили на молитву, в классы. Надзиратели следили за каждым шагом гимназистов. Даже письма к родным воспитанники обязаны были отдавать незапечатанными; и хотя надзиратели редко пользовались своим правом читать эти письма, одно сознание, что равнодушный, а то и враждебный человек может заглянуть в строки, где говорится о самом дорогом, сковывало детей и не позволяло быть откровенными.

Мальчикам запрещалось все, что могло напоминать домашнюю жизнь. Им не позволяли хранить у себя личные вещи и деньги, покупать лакомства или хоть что-нибудь из съестного, хотя кормили в гимназии довольно скудно. Впрочем, последнее запрещение мало заботило Лобачевских: Прасковья Александровна перед отъездом домой, в Нижний Новгород, сумела оставить им всего на полтинник медных денег.

Братья рьяно взялись за учение. Смена разнообразных уроков, когда каждый словно еще одно новое окно в неведомый мир, сперва ошеломила их. Потом они к этому привыкли, появились любимые и нелюбимые предметы, любимые и нелюбимые учителя.

Николаю Лобачевскому очень повезло в одном: он рано попал к образованному, талантливому и серьезному учителю математики, оценившему незаурядную одаренность мальчика и всемерно помогавшему развитию его таланта.

...Григорий Иванович Карташевский приехал в Казань девятнадцатилетним юношей в январе 1799 года, сразу после окончания Московского университета. В гимназии Карташевский быстро завоевал уважение и репутацию выдающегося педагога.

Нельзя сказать, чтобы все воспитанники его любили, — он был слишком сух и холоден с ними. Хотя многие с детской чуткостью понимали, что это только внешняя оболочка, только приемы, взятые Карташевским за правило поведения, и за выказываемой сухостью скрывается горячее, доброе к ним сердце, но всякий раз холодность учителя заново замыкала ребячьи души.

Такое поведение Карташевского, бог знает почему казавшееся ему единственно правильной педагогической линией, может быть уходило корнями в его собственное суровое детство: он рано потерял отца, единственно близкого и любившего его человека, и больше половины жизни провел в стенах закрытых учебных заведений. Он не привык ни перед кем раскрываться и крепко таил свои чувства. Правда, Карташевский совсем не стал угрюмым и нелюдимым, напротив, имел живой, веселый нрав, любил пошутить и посмеяться, тонко чувствовал красоту природы и поэзии. Но в воспитании не терпел «нежностей», никогда не хвалил учеников, стоял за высокую требовательность и строгую дисциплину. Он был искренне убежден, что только таким путем сможет сделать из вверенных ему мальчиков настоящих людей.

Уроки Карташевский вел очень интересно. Знание языков, широкое знакомство с историей предмета и современной литературой сильно помогали ему в этом. Он строил собственную программу и рассказывал много увлекательного: о великих открытиях прошлого и о том, что стояло на пороге завтрашнего дня; о судьбах знаменитых математических задач, много веков тревожащих умы ученых...

На таких уроках перед мальчиками раскрывались неизведанные дали. Слушая учителя, Николай ничего не записывал, сидел не шевелясь, затаив дыхание.

Развертывая перед учениками историю геометрии еще со времен Древнего Египта, Ассирии, Вавилона, Греции, Карташевский объяснял им, что в каждой науке наступает время, когда, чтобы двинуться дальше, надо собрать воедино все уже известное, из отдельных частей построить здание.

Таким строителем, великим собирателем стал Эвклид. Поэтому он занимает совершенно особое и исключительное место в математике. Великий геометр поставил своей задачей найти законы, которым подчиняются все линии и тела в природе, и расположить эти законы в строгой системе. Исполинский труд его завершился созданием «Элементов» — основы основ всей геометрии.

Эпоха царей Египта Птолемеев, в которую жил Эвклид, вообще была эпохой собирания и строительства. А местом действия, почвой, на которой начался новый расцвет науки, стала Александрия — город, заложенный еще Александром Македонским на берегу Средиземного моря, у устья Нила.

Карташевский описывал Александрию времен Птолемеев так, словно и не прошло с той поры более двадцати веков, словно он сам лишь вчера побывал в этом городе, и ощущение близости, достоверности передавалось его ученикам. Они видели ровные широкие улицы, стройные здания строгого греческого стиля с высокими фронтонами, с колоннами, а рядом с ними — дворцы восточной пышности.

Город окружали гавани, которые служили стоянками для огромного флота Птолемеев. Александрия торговала чуть не со всем миром.

Но самое важное — туда переместился центр греческой, или, как ее теперь стали называть, эллинской культуры. Начало этого научного расцвета совпало с созданием знаменитого Александрийского музея, или Мусейона, — храма муз. Мусейон был расположен в царском квартале Брухейоне, где для него отвели часть дворцовых построек. Здесь были залы для совместных занятий, большая библиотека, ботанический и зоологический сады, анатомический кабинет, астрономическая башня. Кроме того, все ученые располагали комнатами для уединенной работы.

В Мусейон стекались математики, астрономы, историки, поэты, и Александрия стала мировым центром науки и литературы.

Рассказ Карташевского не на шутку завладел воображением Николая. Много дней и ночей мальчик находился под впечатлением услышанного. Богатая фантазия подсказывала ему сцены из жизни далекого города, дополняя их новыми и новыми подробностями.

Он представлял себе Эвклида и других ученых: как они ходят в длинных белых хитонах, как пишут на папирусах каламами — заостренными тростинками из камыша, как с помощью циркуля и линейки чертят фигуры и доказывают друг другу теоремы.

Но чаще всего рисовалась ему одна и та же картина: широкие улицы Александрии, так не похожие на улицы и переулки Казани, — извилистые, то карабкающиеся в гору, то круто спускающиеся под уклон, — а по ним мимо дворцов, мимо густых пышных парков бродит смуглый человек с высоким лбом и курчавой бородой, обдумывая и создавая великое творение.

Николаю казалось, что в закрытой комнате, в тиши Мусейона, Эвклид не смог бы осуществить свой замысел. Он должен был много ходить по прямым улицам, всматриваться в геометрию зданий, видеть просторы моря с далеким горизонтом.

Каждый день, когда солнце переходило через зенит, а тени от кипарисов заметно удлинялись, Эвклид отправлялся на прогулку к Фаросу. Он любил этот изрезанный бухтами остров, где возводились большие постройки, где бурно кипела жизнь. Ученый медленно проходил по септастадиону — высокому молу, соединяющему Фарос с городом, и направлялся к северной оконечности острова. Здесь несколько лет назад был заложен Фаросский маяк. По замыслу великого архитектора Сострата маяк, увенчанный фигурой бога моря Посейдона, должен был стать самым высоким зданием в мире.

Четырехугольный нижний этаж башни был уже наполовину построен. От основания маяка в обе стороны тянулась высокая стена с башенками и воротами.

Эвклид подолгу смотрел, как рабы, судорожно напрягая мышцы, поднимают огромные глыбы известняка, как укладывают их правильными рядами, оставляя отверстия для окон.

Контуры маяка были точны, строги, и в этом недостроенном здании так ясно чувствовалось устремление ввысь, что казалось, будущие очертания становятся зримыми и вся грандиозная башня стоит перед глазами.

«Вот таким же высоким, строгим и абсолютно правильным должен я построить здание геометрии, — думал Эвклид. — И воздвигнуто оно будет на таком же прочном фундаменте».

Все, что было известно геометрам той эпохи, изучил Эвклид. Но это были только детали постройки. Для целого здания не хватало еще многого. «И потом, — размышлял Эвклид, не отрывая глаз от возносящегося вверх маяка, — камни должны подходить один к другому, здание не терпит ни разрывов, ни пустот».

Бессчетное число раз всходило и погружалось в море солнце, не однажды разливался Нил, затопляя поля, а Эвклид был еще далек от достижения цели...

Нелегкий, даже непосильный труд предстоял ученому. Сегодня перед ним возникали контуры трактата, а назавтра уже найденное, казалось, решение снова ускользало.

Вместе с Эвклидом Николай Лобачевский мучительно искал и открывал элементы геометрии. Он остро почувствовал, понял всем сердцем, что служение науке — это подвиг, трудный, суровый подвиг.

Лобачевскому казалось, что был какой-то один особенный день, когда Эвклид, наконец, придумал, как и из чего он сумеет построить всю геометрию. Николай начал рисовать себе, как это произошло.

...В тот день Эвклид, как всегда, после полудня вышел из Мусейона. Двигался он медленно, погруженный в свои мысли. Он чувствовал, как в голове, наконец, возникают контуры его трактата.

Миновав западные ворота, ученый направился к гавани.

Николай видел берег, по которому бродил Эвклид. Широкая полоса песка была усеяна круглой галькой. То тут, то там встречались большие глыбы известняка. Эвклид часто нагибался, поднимал разные камешки, набирал в горсть песку, рассеянно пересыпая его из одной ладони в другую. Потом остановился, долго стоял и в задумчивости начал чертить на песке одно и то же слово «стойхейа» — στοιχετα.

Теперь он уже по-иному, с пристальным вниманием начал рассматривать все эти разнообразные камни, будто внезапно осознав, какой смысл открыл он в них для себя; теперь он, наконец, с благодарностью понял, почему его неизменно влекло сюда, на этот берег.

Вдруг Эвклид выпрямился, минуту размышлял о чем-то и заторопился домой.

«Стойхейа» — буквы, элементы. Вот материал, вот те камни, из которых он сможет построить здание геометрии. Так же, как из букв складываются слова, весь язык, вся литература, так же из элементов геометрии — основного, что входит в геометрические построения, теоремы и доказательства, он построит всю геометрию.

Солнце уже садилось, но воздух был по-прежнему насыщен зноем. Эвклид с наслаждением вошел в прохладные сады Мусейона.

Очутившись в своей комнате, Эвклид взял чистый свиток, развернул его и сверху написал опять то же слово: «Стойхейа».

Теперь начиналась главная работа. Надо найти и собрать все элементы, надо решить, какие понятия, аксиомы, определения будут главными, исходными элементами и на них воздвигнуть всю геометрию. Тысячи рабов много лет строят Фаросский маяк. Здесь будет строить один человек, один ученый. Сколько же лет уйдет у него на это?

И Николай сделал для себя еще одно открытие. Он понял, что жизнь ученого — это труд, тяжелый, всепоглощающий труд, когда нет счета ни часам работы, ни дням...

В титаническом труде великого геометра, в нем самом была заключена награда, о которой Эвклид, наверное, никогда не думал и которую уж, конечно, не мог предвидеть... Фаросский маяк, который древние называли седьмым чудом света, простоял до четырнадцатого века, так прочно он был построен. А другой памятник той эпохи, «Элементы»,— сперва пергаментный свиток, потом рукопись, переписанная писцом, наконец напечатанная книга — живут и здравствуют по сей день, удивляя и покоряя умы стройностью, широтой и ясностью.

От века к веку возрастало преклонение перед творением Эвклида. Средневековый итальянский математик Кардано писал об «Элементах»:

«Неоспоримая крепость их догматов и их совершенства настолько абсолютны, что никакое другое сочинение, по справедливости, нельзя с ним сравнивать. В них отражается такой свет истины, что, по-видимому, только тот способен отличить в сложных вопросах геометрии истинное от ложного, кто усвоил Эвклида».

Несколько иначе, но не менее высоко оценил труд Эвклида и Альберт Эйнштейн. Он сказал:

— Мы почитаем древнюю Грецию как колыбель западной науки. Там была впервые создана геометрия Эвклида — это чудо мысли, логическая система, выводы которой с такой точностью вытекают один из другого, что ни один из них не был подвергнут какому-либо сомнению. Это удивительнейшее произведение мысли дало человеческому разуму ту уверенность в себе, которая была необходима для его последующей деятельности. Тот не рожден для теоретических исследований, кто в молодости не восхищался этим творением.

И Лобачевский восхищался в молодости Эвклидом. Но вот пришла творческая зрелость, и он, сполна посвятивший себя геометрии, скоро понял, что «Элементы» Эвклида не отличаются абсолютным совершенством, что они не безупречны. Два порока таили в себе «Элементы». Оба лежали в самом фундаменте здания. Один заключался в пятом постулате. Но был и другой. «Начала» открывались определениями простейших элементов геометрии — точки, линии, поверхности. Между тем их никак нельзя определить, потому что как раз они сами и есть исходные, самые первоначальные понятия геометрии. Именно с их помощью определяют все остальные элементы геометрии. А еще более простых вещей, которыми можно было бы определить точку, линию, поверхность, в природе не существует.

Недаром потом, в начале своего знаменитого доклада, Лобачевский скажет, что «никакая математическая наука не должна начинаться с таких темных пятен, с каких, повторяя Эвклида, начинаем мы геометрию, и что нигде в математике нельзя терпеть такого недостатка строгости, какой принуждены были допустить в теории параллельных линий».

Карташевский пробудил в совсем еще маленьком Николае жгучий интерес, любовь к науке и не по-детски серьезное, ответственное отношение к ней. И он же заронил в Лобачевском стремление всегда во всем разобраться самому, не принимать на веру ничего, каким бы высоким авторитетом это ни было освящено, каким бы несомненным ни казалось.

Посеянные Карташевским семена попали на благодатную почву, взошли и пустили крепкие корни.

Позднее, когда пятнадцатилетний мальчик поступил в университет, его учителями стали профессора Бартельс, Броннер, Литтров. Эти люди сумели создать в Казани передовую физико-математическую школу и работали, не жалея сил и знаний.

В университете Лобачевский не только продолжал жадно и страстно изучать науки — всего усерднее точные, но уже и пытался искать собственные пути решения сложных задач. Профессора единодушно называли юношу лучшим студентом, гордостью университета.

Но, занимаясь много, взахлеб, и поражая профессоров той легкостью, с какой на ходу схватывал он сущность труднейших предметов, студент Лобачевский приводил в негодование начальство непрестанными озорными выходками. То на гимназическом дворе он запустил ракету, «разорвавшуюся с большим треском», как записали в «шнуровой книге»; то, поспорив с веселой компанией товарищей, перепрыгнул через грузного профессора Никольского, с одышкой спускавшегося по лестнице; то, на удивление и потеху всему народу, проехал по городскому скверу верхом на корове, как рулем, правя рогами. А то по университету начинали гулять его едкие шутки и эпиграммы, вызывая хохот всей молодежи.

Неуемная энергия студента требовала выхода. Его свободолюбивый, веселый нрав не могли сдержать запреты монашеской дисциплины. Однако Николаю Лобачевскому приписывались грехи и похуже.

В «шнуровой книге» записано, что он «в значительной степени явил признаки безбожия». Это было чревато уже весьма серьезными последствиями. Позже сын Лобачевского писал в своих воспоминаниях, что в те годы его отец «на волосок был от солдатской шинели». Вопрос о поведении непокорного юноши встал на Совете университета. Его спасло только заступничество профессоров.

...Но пора юности кончилась, и очень рано пришла ей на смену пора творческой зрелости.

Эпохи реакции всегда вызывают протест в лучшей части общества. И общество рождает людей, сознательно или бессознательно выражающих этот протест в своей деятельности, как бы ни была она на первый взгляд далека от политики, от социальной борьбы в стране. Так зародилось искусство Возрождения в мрачную пору средневековья. Так еретические идеи Галилея засверкали сквозь темный дым костров инквизиции. Так прогрессивная общественная мысль, протестующая против самодержавного гнета, вскормила гений Пушкина и Лермонтова.

Лобачевский, их современник, создал неэвклидову геометрию. Трудно вообразить себе что-нибудь более далекое от общественных интересов той поры. Однако это было не только одно из величайших творений человеческого ума, но тем самым и символ свободы мышления, свободы духа, акт своеобразного ниспровержения «незыблемых устоев». Это так точно понял, так ярко изобразил Янош Бояи — в своих записях, в том длинном монологе о Лобачевском и его труде.

Лобачевский создал основы своей геометрии в течение трех лет — с 1823 по 1826 год.

Что это было за время?

Для Казанского университета то были последние годы семилетнего правления черной памяти Магницкого — «истинного сына церкви и отечества», по верноподданическому выражению профессора Никольского.

Для России то был конец царствования Александра I. «Нет явления печальнее, бесплоднее и нелепее русской реакции во вторую половину царствования Александра. Она превратилась в печальный обскурантизм и преследование мысли, слова и науки. Едва начинающееся слабое развитие общественное было приостановлено надолго», — писал историограф Казанского университета профессор Н. Н. Булич.

Для всей Европы то было время разгула «священного союза».

Александр I стремился превзойти в фанатизме и жестокостях даже Меттерниха, идейного вождя «священного союза». Общеевропейская реакция приняла в России наиболее страшные и уродливые формы.

Магницкий, верный холуй царя, не знал пределов в своем угодническом рвении. Он рекомендовал августейшему монарху для начала разгромить университет в Казани, ибо последний «причиняет общественный вред... Акт об уничтожении Казанского университета тем естественнее покажется ныне, что, без всякого сомнения, все правительства обратят особенное внимание на общую систему их учебного просвещения, которое, сбросив скромное покрывало философии, стоит уже посреди Европы с поднятым кинжалом».

Университет уничтожению не подвергся, но для его «исправления» попечителем Казанского учебного округа был назначен Магницкий.

«Истинный сын церкви и отечества», учредив систему наушничества и доносов, насадив мракобесие, ханжество, лицемерие и заодно уволив десять профессоров, быстро привел Казанский университет в соответствие со своими идеалами. В конце 1825 года, окидывая взором содеянное, он с восторгом говорил:

— Университет Казанский за златою оградой высочайше данных ему инструкций чужд повсеместной заразы, верен общей матери нашей, церкви православной, питает юность, пылающую живой верой, чистым медом ее небесного учения...

В такой атмосфере создавал Лобачевский свою крамольную науку и готовился возвестить о ней. Это становилось актом и научной и гражданской смелости.

Гаусс, опасавшийся «беотийцев», быть может, не раз в минуты колебаний повторял про себя слова Лютера: «Что два и пять равно семи, это ты понимаешь своим рассудком; но если власть предержащие говорят, что два и пять равно восьми, ты должен этому верить, наперекор рассудку...»

Под влиянием Меттерниха правительства всех немецких государств издали постановление об учебных заведениях, в котором предлагалось немедленно предавать суду или удалять профессоров и преподавателей, если они будут «морочить юношей мечтательными и призрачными теориями». Недаром петербургский академик Фусс, о котором мы уже упоминали, отвергая рукопись курса «Геометрии», подготовленную Лобачевским к печати в 1823 году, среди прочего писал:

«Странно, что сочинитель принимает французский метр за единицу при измерении прямых линий и сотую часть четверти круга, под именем градуса, за единицу при измерении круга. Известно, что сие разделение выдумано было во времена французской революции, когда бешенство нации уничтожать все прежде бывшее распространилось даже до календаря и деления круга».

В той рукописи Лобачевского не было еще ни слова о неэвклидовой геометрии. Он еще только начинал создавать ее. В заключении академика Фусса он, может быть, и услышал предостерегающий голос. Но, помимо простой человеческой смелости, в Лобачевском жил еще неукротимый дух ученого-гиганта, которого ничто не могло ни сломить, ни заставить свернуть с избранного пути.

В январе 1826 года Лобачевский завершил новую свою рукопись — первую в истории математики законченную работу по неэвклидовой геометрии. Теперь надо было отдать ее на суд университетских коллег.

Наступил февраль. Однажды вечером Николай Иванович долго сидел, запершись в своем кабинете. В глубокой задумчивости смотрел он на большой лист бумаги, лежащий перед ним. Потом, наконец, взял перо и мелким, четким почерком решительно написал:

«В отделение физико-математических наук.

Препровождаю сочинение мое под названием «Сжатое изложение начал геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных линиях».

Желаю знать мнение о нем ученых моих сотоварищей...»

И подписался: «Проф. Н. Лобачевский, Казань, 1826, февраль».

В жизни Казанского университета тем временем назревало важное событие. Ровно через два дня после представления физико-математическому отделению сочинения Лобачевского началась ревизия деятельности Магницкого.

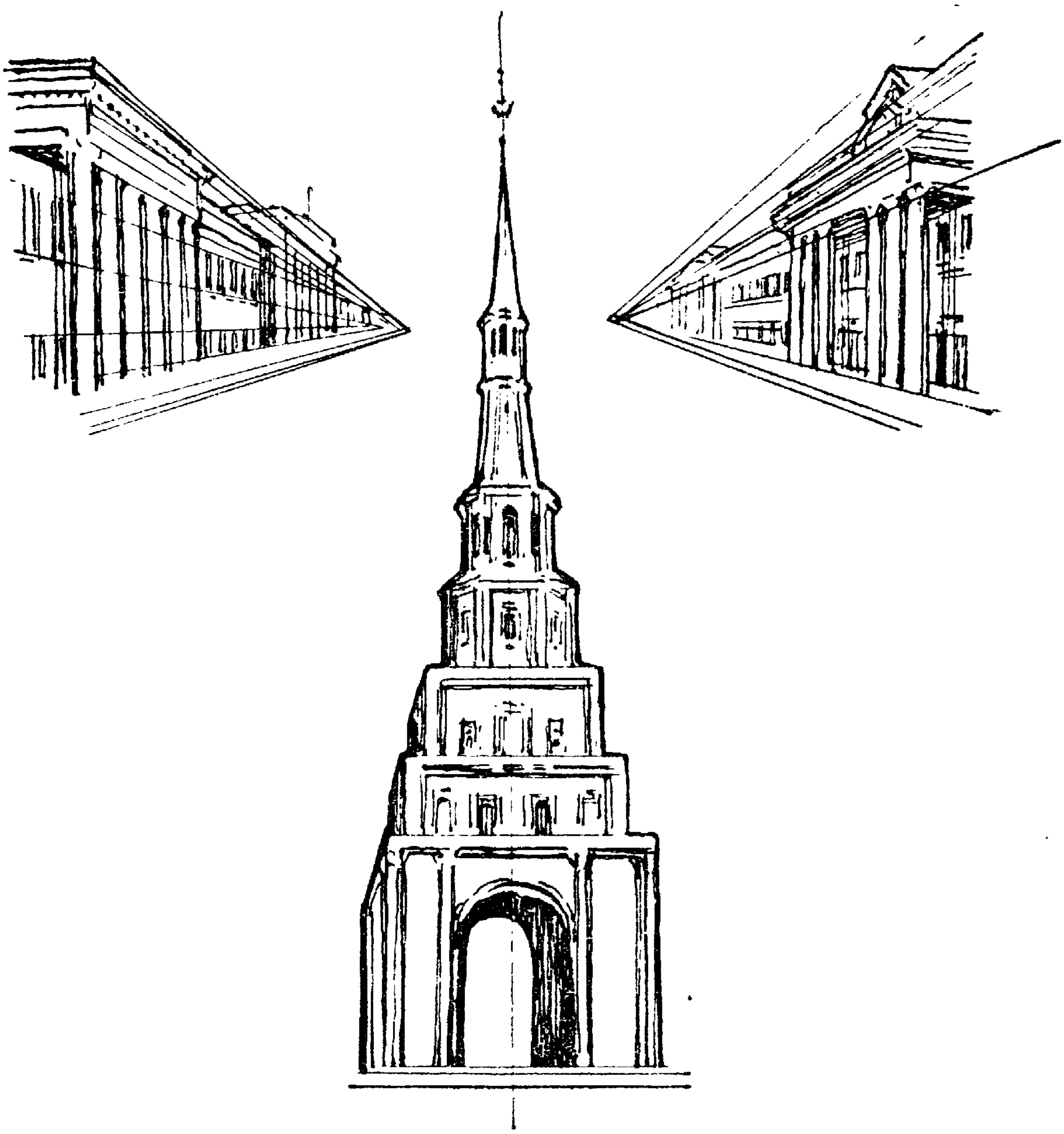
Ловкий и хитрый, наделенный необычайным чутьем карьериста, Магницкий всегда очень умело находил себе в высших сферах нового покровителя, каждый раз «вовремя» покидая и предавая предшествующего, чья звезда начинала закатываться. Но достигнув совершенства в этом искусстве, прожженный политик однажды допустил просчет — и какой! После смерти Александра I Магницкий видел уже на престоле царевича Константина. И он послал ему приветствие, исполненное льстивых слов, одновременно не забыв отправить докладную записку, где пренебрежительно отзывался о его брате Николае. Судьба зло подшутила над прыткостью Магницкого. Докладная записка попала в руки ставшего императором Николая I. Все обвинения, все жалобы на попечителя, в обилии накопившиеся за страшные годы его правления, теперь получили ход.

Был дан приказ произвести ревизию деятельности Магницкого и того состояния, в которое привел он Казанский учебный округ и, в частности, университет. Выводы ревизии нетрудно было предугадать. Магницкого ждала опала.

В этот-то момент, переломный в истории Казанского университета, через два дня после начала ревизии, 11 февраля 1826 года, Лобачевский докладывал о созданной им новой геометрии. Мы уже знаем, как было встречено его сообщение. Никто, ни один человек, кроме самого докладчика, не понял, что в эти часы происходит крутой перелом и в истории математики.

День 11 февраля оказался переломным и в судьбе Лобачевского. Отныне жизнь его пошла по двум разным руслам. До этого он чувствовал себя только ученым,

Николай Иванович Лобачевский.



Казань.
Университет. Гимназия. Башня Сююмбеки.

теперь он понял, что становится еще и борцом за новую науку, за ее развитие, за ее признание.

Лобачевский как-то сказал об усилиях французского математика Лежандра разрешить проблему пятого постулата:

— Нахожу, что Лежандр несколько раз попадал на ту дорогу, которую выбрал я так удачно; но, вероятно, предубеждение в пользу принятого всеми положения заставляло, его на каждом шагу спешить с заключениями...

Поэтому, объясняет Лобачевский, Лежандр и сбился с верного пути.

Путь, выбранный Лобачевским «так удачно», оказался тернистым.

Этот путь революционера в естествознании Лобачевский проделал совершенно один. Тридцать лет в полном одиночестве исследовал он открывшийся ему мир новых представлений. У него не было спутников в трудном и долгом путешествии. В лучшем случае он встречал непонимание, а чаще всего — грубые насмешки безграмотных писак и тупое пренебрежение косных академических кругов.

Так, в 1834 году журнал «Сын отечества», издававшийся небезызвестными доносчиками Булгариным и Гречем, напечатал пасквилянтскую статью о Лобачевском.

«...Даже трудно было бы понять и то, каким образом г. Лобачевский из самой легкой, самой ясной в математике науки, какова геометрия, мог сделать такое тяжелое, такое темное и непроницаемое учение, если бы он сам отчасти не надоумил нас, сказав, что его Геометрия отлична от употребительной, которой все мы учились и которой, вероятно, уже разучиться не можем, и есть только воображаемая. Да, теперь все очень понятно. Чего не может представить воображение, особливо живое и вместе уродливое? Почему не вообразить, например, черное белым, круглое четырехугольным, сумму всех углов в прямолинейном треугольнике меньше двух прямых? Очень, очень можно, хотя для разума все это и непонятно.

...Как можно подумать, чтобы г. Лобачевский, ординарный профессор математики, написал с какой-нибудь серьезной целью книгу, которая немного принесла бы чести и последнему приходскому учителю?»

В конце анонимный автор издевательски вопрошал: «Почему бы вместо заглавия «О началах геометрии» не написать, например, Сатира на геометрию, Карикатура на геометрию и что-нибудь подобное?»

«Осы», гнездо которых растревожил Лобачевский, поднялись над головой ученого и злобно жалили его.

Редакция «Сына отечества» не пожелала поместить в журнале ответ Лобачевского на оскорбляющую его статью, хотя таков был приказ министра народного просвещения, защищавшего, разумеется, не новые идеи казанского профессора математики, а честь мундира ректора университета. Но Булгарин и Греч, издававшие свой журнал на средства Третьего отделения, могли позволить себе безнаказанно издеваться над крамольно мыслящим ученым, так же, как они издевались над Пушкиным и всей передовой русской литературой.

Все же Лобачевский опубликовал свой ответ — сдержанный, полный внутреннего достоинства. Поместил он его в «Ученых записках Казанского университета» в 1835 году вместе с мемуаром «Воображаемая геометрия». Он написал:

« В № 41 журнала «Сын Отечества» 1834 года напечатана критика, весьма оскорбительная для меня, и, надеюсь, совершенно несправедливая. Рецензент основал свой отзыв на том только, что он моей Теории не понял и почитает ее ошибочной, потому что в примерах встречает один нелепый интеграл. Впрочем такого интеграла не нахожу я в моем сочинении. В ноябре месяце прошедшего года послал я к Издателю ответ, который однакож, не знаю почему, до сих пор, в продолжение пяти месяцев, еще не напечатан».

Едва ли те, кто издевался над ученым или игнорировал его труд, удосужились обратить внимание на этот ответ.

Как ни горько говорить об этом, но немногим лучше повела себя и Петербургская академия наук и, что всего прискорбнее, выдающийся математик того времени, академик Остроградский. С издевательской небрежностью отнесся он к присланной ему на отзыв работе Лобачевского. Бывший студент Казанского университета Михайлов вспоминал, как однажды позволил себе сострить этот ученый, чье имя пользовалось заслуженной известностью далеко за пределами России:

— Лобачевский — недурной математик, но если надобно показать ухо, то он покажет его сзади, а не спереди...

Только один из современников Лобачевского нашел в себе смелость однажды выступить против всеобщего пренебрежения к новой геометрии. 31 мая 1842 года профессор Петр Иванович Котельников, декан физико-математического факультета Казанского университета, произнес актовую речь со знаменательным названием: «О предубеждении против математики».

— Не могу умолчать о том, — сказал Котельников,— что тысячелетние тщетные попытки доказать со всею математическою строгостью одну из основных теорем геометрии, равенство суммы углов в прямолинейном треугольнике двум прямым, побудили достопочтенного заслуженного профессора нашего университета предпринять изумительный труд построить целую науку, геометрию, на новом предположении: сумма углов в прямолинейном треугольнике менее двух прямых — труд, который рано или поздно найдет своих ценителей.

Очень хотелось бы узнать, разобрался ли Котельников в те годы или, быть может, позже в существе неэвклидовой геометрии. Ведь для Лобачевского было бы большим счастьем, если бы пробилась брешь в той глухой стене непонимания и издевательств, которая окружала его до самой смерти; если бы рядом с ним оказался единомышленник; если бы этим единомышленником стал такой образованный и одаренный математик, как Петр Иванович Котельников.

Что же нам известно об истинном отношении Котельникова к геометрии Лобачевского? К сожалению, очень мало. Его актовая речь не только прозвучала вызовом общественному мнению — мы не можем не оценить то мужество, с которым он публично выступил против всех авторитетов, — в ней содержались признание и вера в высокое значение новых идей. Чутье талантливого математика подсказало Котельникову, что «геометрии на новом предположении» предстоит большое будущее.

И известен еще случай, когда Котельников высказался о геометрии Лобачевского. Его ученик Суворов вспоминает, как Котельников однажды сказал, что геометрические идеи Лобачевского остаются непонятными только по недостатку ясности изложения. Но Суворов поступил учиться в Казанский университет в 1863 году, через семь лет после смерти Лобачевского, а в семидесятых годах идеи неэвклидовой геометрии получили уже широкое признание и сам Суворов был пионером их дальнейшей разработки. Очень вероятно, что к тому времени и Котельников уяснил себе не только значение, но и содержание новой геометрии, если только он не разобрался в нем раньше.

Знаменательно, что сын Петра Ивановича — Александр Петрович Котельников в течение всей своей долгой жизни занимался развитием и приложением идей Лобачевского. Избрав специальностью механику, Александр Котельников связал эту науку с неэвклидовой геометрией, как бы ввел в неэвклидово пространство огромный мир механических движений. В дальнейшем он помогает раскрыть глубокую внутреннюю связь между величайшими открытиями двух научных эпох — между геометрией Лобачевского и теорией относительности Эйнштейна, — сам являя собой как бы живую связь между этими эпохами.

Александр Петрович Котельников родился спустя 11 лет после смерти Лобачевского и в четырнадцать лет потерял отца. Так что едва ли можно говорить о непосредственном влиянии Петра Ивановича на зарождение у его сына интереса к столь сложному предмету. Да и среди учителей Александра Котельникова были Суворов и другой выдающийся математик, Васильев, занимавшиеся неэвклидовой геометрией уже с семидесятых-восьмидесятых годов. Однако не может быть, чтобы отец не рассказывал мальчику о великой и трудной жизни Лобачевского,— ведь Лобачевский неизменно возбуждал глубокий интерес у окружающих, а обаяние его ума и таланта действовало на всех, кто с ним соприкасался. Несомненно, воображением мальчика должны были завладеть и образ замечательного ученого, так близко общавшегося с его отцом, и образы созданного им необыкновенного мира.

Александр Петрович Котельников дожил до 79 лет (он умер совсем недавно, в 1944 году). Он пронес живую эстафету от Лобачевского до наших дней. И что нам особенно дорого, он был сыном Петра Котельникова, единственного человека, от которого Лобачевский услышал голос привета на своем долгом тернистом пути создателя новой науки.

Второй путь Лобачевского — путь педагога, руководителя университета и его строителя — оказался более благодарным. В этой роли Лобачевский еще при жизни пользовался огромным уважением и авторитетом среди коллег, на этом поприще он быстро заслужил любовь и признательность воспитанников.

Создавая свою геометрию, Лобачевский не бежал от страшной действительности режима Магницкого в чистую науку. Без науки он просто не мог жить. Так же не спасался он, не понятый в науке, бегством в практическую деятельность. Такой деятельности требовала его активная натура.

Сперва декан физико-математического факультета, а с 1827 года ректор Казанского университета, Лобачевский отдавал всю свойственную ему огромную, неуемную энергию, благородство души, любовь к юношеству и науке делу создания первоклассного учебного заведения и воспитания в нем высокообразованных молодых людей, честных, преданных просвещению и готовых служить своей стране, своему народу.

...Через год с небольшим после избрания Лобачевского ректором, 5 июля 1828 года, в Казанском университете состоялось традиционное собрание, посвященное очередному выпуску студентов. В конце торжественного акта Лобачевский произнес речь «О важнейших предметах воспитания», ставшую впоследствии знаменитой.

На этот раз он не уклонился от актовой речи, как поступил однажды при Магницком, вызвав гнев попечителя. Те стены, которые слышали из года в год лишь слова ханжеские, лицемерные, полные угодничества, смирения и отрешения от жизни, слова, развращающие и воспитанников и их воспитателей, теперь внимали речи новой, смелой, звучащей как откровение, речи, прославляющей жизнь и науку, ум и счастье, честь и достоинство человека.

— Мы живем уже в такие времена, когда едва тень древней схоластики бродит по университету. Здесь, в это заведение вступивши, юношество не услышит пустых слов, без всякой мысли, одних звуков, без всякого значения. Здесь учат тому, что на самом деле существует, а не тому, что изобретено праздным умом...— говорил Лобачевский. — Одно образование умственное не довершает еще воспитания...

Жить — значит чувствовать, наслаждаться жизнью, чувствовать непрестанно новое, которое бы напоминало, что мы живем. Единообразное движение мертво... Подобно реке, жизнь течет в излучистых берегах: то разливается в лучах радости, то омывает крутые утесы горестных размышлений. Ничто так не стесняет потока, как невежество; мертвою прямою дорогою провожает оно жизнь от колыбели к могиле.

— Вы, — продолжал он гневно, — которых существование несправедливый случай обратил в тягостный налог другим; вы, которых ум отупел и чувство заглохло, вы не наслаждаетесь жизнью. Для вас мертва природа, чужды красоты поэзии, не занимательна история веков. Я утешаюсь мыслью, что из нашего университета не выйдут подобные произведения растительной природы...

Срочное время поручено человеку хранить огонь жизни, хранить с тем, чтобы он передал его другим.

Будем же дорожить жизнью, покуда она не теряет своего достоинства. Пусть примеры в истории, истинное понятие о чести, любовь к отечеству, пробуждаемые в юных летах, дадут заранее то благородное направление страстям и ту силу, которые позволят нам торжествовать над ужасом смерти.

Расставаясь с вами, что скажу вам самого поучительного? Вы счастливее меня. Из истории народов видели вы, что великое государство переходит возрасты младенчества, возмужалости и старости. То же будет и с нашим любезным отечеством. Хранимое судьбою, медленно возвышается оно в своем величии и достигает высоты, на которую еще не восходило ни одно племя человеческое на земле. Века Петра, Екатерины, Александра были знамениты, но счастливейшие дни России еще впереди. Мы видели зарю, предвестницу их, на востоке; за нею показалось солнце...

Гений ученого сочетался в Лобачевском с даром первоклассного педагога. Многочисленные ученики великого геометра вспоминали его блестящие лекции, его умение так излагать предмет, что он начинал сверкать новыми красками, его способность пробуждать и развивать в молодых людях самостоятельность мышления.

Лучше всего говорят о Лобачевском воспоминания его бывших учеников и те рассказы, которые одно поколение учеников передавало другому.

Николай Иванович, рассказывает уже знакомый нам Петр Иванович Котельников, владел удивительной способностью излагать ясно и увлекательно; часто во время лекции благодаря своим гениальным способностям он создавал экспромтом совершенно новые способы решения математических вопросов.

В своих воспоминаниях Иван Иванович Михайлов пишет, что студенты чутьем узнавали в Лобачевском великого ученого и относились к нему с особым уважением: они чувствовали присутствие высшей силы.

— Никогда я не слыхал ропота от студентов, чтоб Лобачевский поступил несправедливо, — говорит Михайлов. — Всякого обращающегося к нему с какой-нибудь просьбой он выслушивал со вниманием, — отвечал, приводил основания, если приходилось отказывать, подавал иному дружеский совет; другого журил, если тот был виновен в чем-нибудь предосудительном, — но без гнева, не выходя из себя.

— Личность нашего ректора Лобачевского чаще всего была предметом наших вечерних бесед, — вспоминал чуть ли не столетним старцем казанский доктор Ворожцов. — Все студенты без исключения его уважали, а студенты-математики просто благоговели перед ним. Глубокий ум, обширные познания, широкое понимание жизни, несокрушимая логика и необыкновенная способность говорить просто, ясно и увлекательно, благородство характера, деликатное и внимательное отношение к молодежи, преданность науке и университету — все это давало ему возможность господствовать над окружающим и служило неистощимой пищей студенческих бесед. Даже все анекдоты, касающиеся его личности, говорили о нем как о человеке мысли. Рассказывали, например, что, увлеченный каким-нибудь математическим вопросом, он не замечал ничего вокруг. Если в таком состоянии он ходил по комнате и встречал стену, то останавливался перед нею и целые часы мог простоять неподвижно, упершись в нее лбом.

Как бы ни был Николай Иванович занят, и наукой, и колоссальной разносторонней педагогической и административной работой, у него всегда находилось время выслушать студента, который к нему обращался с просьбой или за советом, внимательно разобраться в его деле и помочь ему. Его заботила и волновала судьба каждого юноши, и студенты знали и ценили это.

Тот же Ворожцов рассказывает, как, явившись в Казань с двугривенным в кармане, он в течение первых двух лет учился и зарабатывал на жизнь уроками, но в конце концов такой труд без отдыха стал ему невмоготу. Что было делать? Бросать учение? Или идти в казеннокоштные студенты? Ворожцов очень боялся поступать в «казенные», потому что потом приходилось шесть лет служить по указанию министерства. О его сомнениях и страхах узнал Лобачевский и вызвал Ворожцова для беседы.

— Лобачевский, выслушав меня, — говорил потом Ворожцов, — продолжал предлагать вопросы, делая возражения и на мои ответы; я отвечал, также возражая на его замечания, но мало-помалу запас моих возражений истощился, и я почувствовал, что совершенно выбит из своей позиции и вынужден признать, что все мои страхи и сомнения ничем не обоснованы.

Но Лобачевский не ограничился одной беседой. Помня свою казеннокоштную жизнь, подумал он и о том, что переход от полной свободы к строгому режиму довольно труден, и разрешил растянуть этот переход, чтобы Ворожцов постепенно привык к новой обстановке.

Никто лучше Лобачевского не мог подействовать на студента, когда ему нужна была нравственная поддержка, когда нужно было поднять в нем падающий дух, произвести в нем нравственный перелом. Ворожцов рассказывает об одном случае.

Вместе с ним учился студент Хлебников, очень даровитый, но большой охотник выпить. В пьяном виде он ничего не помнил и однажды бросился с ножом на своего товарища. Хлебникова всячески пытались отучить от пьянства, но ничего не помогало; уже поговаривали, что его придется сдать в солдаты. Оставалась последняя мера — Хлебникова позвали к Лобачевскому. Началась между ними продолжительная беседа. Хлебников после рассказывал:

— Он не укорял меня, не ругал, но во время разговора я был просто вне себя, раза три меня в пот кидало...

Лобачевский был в течение девятнадцати лет бессменным кормчим университета, и эти годы стали временем расцвета одного из лучших учебных заведений России; он вел свой корабль сквозь многие бури и опасности, вел твердой и мужественной рукой. Под его началом было много различных людей с разными стремлениями, вкусами, убеждениями, но Лобачевский умело и уверенно управлял их деятельностью.

Казанский университет, каким его выпестовал Лобачевский, явился школой для многих великих людей России.

Здесь учился Лев Толстой. Сохранилось прошение Толстого на имя ректора с просьбой допустить его к вступительным экзаменам, а на этом прошении резолюция Лобачевского.

Здесь учились знаменитые русские химики Бутлеров и Зинин.

Отец Ленина, Илья Николаевич Ульянов, до конца своих дней с безграничным уважением и теплотой вспоминал Лобачевского: ректор чутко отнесся к молодому студенту, поверил в его способности. Он сам рекомендовал привлечь Ульянова к работе метеорологических станций — делу по тому времени сложному и ответственному.

А потом студентом Казанского университета стал Владимир Ильич Ленин.

Профессор Булич сказал о Лобачевском:

— Его благородная жизнь есть живая летопись университета, его надежд и стремлений, его возрастания и развития.

Лобачевский строил Казанский университет не только в переносном, но и в буквальном смысле слова. Он наметил и осуществлял широкую программу строительства новых зданий и лабораторий и возглавил строительный комитет. Не довольствуясь тем, что ему удалось привлечь к делу лучшего архитектора Поволжья, Лобачевский сам серьезно изучал архитектуру.

За пять лет были созданы астрономические обсерватории, физический кабинет, химическая лаборатория, анатомический театр, клиника, библиотека и типография. «В стенах этих учреждений все дышит памятью Н. И. Лобачевского, все восстанавливает перед нами симпатичный облик великого ученого и неутомимого труженика-ректора», — писал историк Загоскин.

Лобачевский обладал выдающимся организаторским талантом и твердой волей. Эти его качества, проявляясь повседневно, сослужили университету особую службу во время двух страшных событий, сохранившихся в памяти современников.

...В Казани вспыхнула эпидемия холеры. Началась паника. Все, кто мог, бежали из города, оставшиеся запасались продуктами и поплотнее запирали свои ворота. Но все равно смерть собирала обильную жатву.

Лобачевский распорядился немедленно прекратить всякую связь между городом и университетской территорией, на которой, по его приказу, поселились все студенты, профессора и остальные служащие университета. Без разрешения ректора никто не мог выйти за ворота. Пища и вода подвергались дезинфекции и строгому контролю. Заболевшие, а их из пятисот шестидесяти человек оказалось всего двенадцать, сразу же изолировались от здоровых. Такой строжайший режим царил до конца эпидемии. Воля и распорядительность Лобачевского спасли университет.

...А в 1842 году ужасный пожар свирепствовал в Казани. Лучшие здания и лучшие кварталы города выгорели полностью. Беда нависла над университетом. Ректор не отлучался с места пожара и сам руководил всеми спасательными работами. Огонь грозил уничтожить библиотеку, которую Лобачевский в течение нескольких лет приводил в порядок. Все наиболее ценное студенты относили на окраину города. Рукописи и книги были спасены. Удалось отстоять от огня и загоревшееся здание библиотеки. Только астрономическая обсерватория и магнитная станция сгорели дотла, но из них тоже успели вынести ценнейшие инструменты. Главное здание университета осталось невредимым.

Рассказывать о жизни и деятельности Лобачевского-ректора — это значит рассказывать о трудах и днях замечательного труженика русского просвещения, человека смелых суждений и независимого характера.

Потом, как это постоянно бывало в истории, смелость суждений и независимый характер пришлись не по нраву новому начальству. Лобачевский, правда, со всевозможными почестями, оказался отстраненным от университетских дел. Он был назначен помощником попечителя Казанского учебного округа. Но разве могла одна лишь административная деятельность, да еще под началом малообразованного попечителя, заменить ему прежнюю жизнь, университетские заботы, преподавание, живое общение со студентами!

Лобачевский сразу почувствовал себя больным и разбитым. Он как-то быстро, на глазах, начал стареть, стала прогрессировать слепота — последствие напряженнейших и долгих ночных занятий. Сначала ему удавалось скрывать свой недуг. Он старался по-прежнему выглядеть сильным, бодрым, уверенным в себе. Но скоро слепота перестала быть тайной для окружающих.

Уход из университета словно открыл дорогу несчастьям. Простудившись, заболел скоротечной чахоткой и в короткий срок истаял, погиб его старший сын Алексей — самый любимый, так похожий на отца, так многообещающе одаренный. Другие дети были малоспособными или нездоровыми от рождения и приносили больше огорчений, чем радости. Смерть сына стала таким ударом, от которого Лобачевский оправиться уже не смог.

Будто какой-то рок преследовал семью Лобачевских, отторгая от нее талантливых и лучших. А может, судьба посчитала, что подарив миру гения, которому удалось свершить предназначенное, род Лобачевских должен расплатиться за такое. Конечно, это мистика... Но печальная правда, что Лобачевскому пришлось пережить не одну страшную потерю.

Еще в 1807 году утонул в реке Казанке его старший брат Александр. Откачать и спасти его не удалось. Потрясенный Николай заболевает тяжелым нервным расстройством. Выздоровев, он, пятнадцатилетний студент, принимает решение — отныне поприщем его будет не математика, а медицина, борьба со смертью. Только дружные усилия профессоров вернули Лобачевского той науке, для которой он был рожден.

Мальчик Лобачевский сумел оправиться от потери, старику не достало сил превозмочь ее.

Один только смысл существования остался у Лобачевского — его наука, его геометрия.

Теперь, когда события его жизни стали далеким прошлым, а история верно оценила все — и великое и малое — и все поставила на свои места, теперь хотелось бы разобраться в судьбе Лобачевского и попытаться понять, какой же все-таки была эта жизнь — трагической или счастливой. Или, быть может, вместе — и трагической и счастливой?

Ответить на такой вопрос нелегко.

Течение внутренней, интимной жизни Лобачевского было глубоко скрыто от его современников; скрыто оно и от нас. Сам он не оставил почти никаких намеков на то, что творилось у него в душе. Он не вел дневников, у него не было друзей настолько близких, чтобы он перед ними полностью раскрывался, и его письма не содержат почти ничего, что говорило бы о его чувствах и переживаниях. Во всяком случае, ничего, связанного с судьбой его непризнанного творения, с новой геометрией. А ведь как раз на этом пути ему достались самые тяжелые удары. Каждый, кто задумывался над судьбой Лобачевского, по-своему оценивал ее, исходя, естественно, из каких-то собственных представлений о характере великого геометра, о смысле его жизни и о смысле человеческой жизни вообще.

Для одних Лобачевский — фигура исключительно трагическая; одинокий, никем не понятый и многими осмеянный, Манфред среди горных вершин науки.

Другие, приводя в пример Лобачевского, говорили, что опасения Гаусса были беспочвенны и напрасны: ведь Лобачевскому его смелость ученого не помешала быть уважаемым профессором, руководителем университета. Его любили студенты, его награждали орденами, ему пожаловали дворянство. В общем, жизнь его внешне была вполне благополучной и счастливой.

И те и другие правы только наполовину.

По выражению его ученика Михайлова, «Лобачевский шел одиноко к цели, как гигант, опустив забрало, и стрелы, пускаемые в него лилипутами, по-видимому, его не уязвляли». Бесспорно, он сознавал, что им создан плацдарм для будущих завоеваний науки, для ее движения вперед. Он не сомневался в великом будущем своей геометрии, иначе откуда он мог бы взять силы для ее непрерывного углубления и совершенствования?!

Но правда ли, что «стрелы его не уязвляли»? Что он безболезненно переживал и издевательства, и непонимание, и одиночество в главном деле своей жизни?

Едва ли... Недаром его современники отмечают, как постепенно живой и открытый нрав Лобачевского менялся, как все более замкнутым становился его характер. Вспоминают о его мрачном взгляде, о нахмуренных бровях, глубокой сосредоточенности и углубленности в себе. Все угадывали за этим постоянную напряженную работу мысли. Но нередко горькая усмешка пробегала по его губам; может, в такие минуты он думал о тех, кто так и не захотел его понять. Все реже и реже случались с ним приступы прежней веселости, все реже сверкал его блестящий юмор.

Да, внешнее благополучие жизни прикрывало внутреннюю ее драматичность. Счастливое понимание своей исторической миссии было для Лобачевского всегда омрачено ощущением безысходного одиночества.

Больной, слепой, на пороге смерти он решил еще раз рассказать о созданной им геометрии, в последний раз привлечь к ней внимание математиков. Это последнее свое сочинение он написал по-французски и назвал его «Пангеометрия». «Пан» — потому, что развитое им учение о пространстве было по тому времени самым широким, всеобъемлющим. Оно заключало в себе его неэвклидову геометрию и как частный, предельный ее случай — геометрию Эвклида.

«Пангеометрия» написана уже не рукой Лобачевского: ослепший, он продиктовал ее своим ученикам... Окончено было дело жизни, оканчивалась и сама жизнь.

Лобачевского не стало 12 февраля 1856 года. Ровно через тридцать лет после того памятного февральского дня, когда родилась неэвклидова геометрия.

Бывает мужество одного действия, одного акта, но если мужеством, подвигом становится вся жизнь, то нет меры, чтобы оценить такое служение человечеству и науке.

«Подвиг мысли дороже нам всех других подвигов, ибо только наука, мысль и знание суть основы благосостояния общественного»,— сказал в надгробной речи профессор Булич.

Почти в одно и то же время на трех кораблях три человека подплыли к неизвестной, окутанной густым туманом земле.

— Не мираж ли впереди? — спросил себя каждый.

Их предшественники, которым выпало на долю хоть сколько-нибудь приблизиться к этой земле, проходили мимо, убежденные, что перед ними и в самом деле только мираж.

Гаусс заглянул в этот мир, но мысль о жизненном подвиге, связанном с путешествием в глубь неизведанной земли, устрашила его.

Лобачевский и Бояи — оба принадлежали к той когорте, из которой выходят великие путешественники, первооткрыватели новых земель.

Бояи не только бесстрашно вступил на эту terra incognita, но и постарался, насколько хватило сил, изучить ее.

Лобачевский поверил в великое будущее открытой им земли. До самой смерти он неутомимо возделывал и обрабатывал ее, и земля принесла замечательные плоды.

Нащупать такое открытие, свершить его и отдать ему всю жизнь — величайшее счастье, о котором только может мечтать ученый!

В истории науки есть немало драгоценных страниц. Но, кажется, история открытия и создания неэвклидовой геометрии не имеет себе подобных: здесь соединилось прошлое, настоящее и будущее многих наук; здесь сложно и трагически переплелись судьбы ученых разных стран, разных взглядов и убеждений, разных характеров и душевного склада. Героям этой истории пришлось решать (каждому по-своему!) и сложнейшую научную задачу, что требовало особой силы и смелости мышления, и задачу, потребовавшую великого человеческого мужества.

История эта поразительно ярко, как, может быть, мало какая другая глава науки, показала, что подвиг мышления увенчивается победой только тогда, когда он сопряжен с великим подвигом духа, с неустрашимым человеческим мужеством, с неуклонным следованием цели.

Вот почему нам захотелось рассказать эту историю.

ПОСТИЖЕНИЕ МИРА

РИМАН

В преддверии

Новая глава в истории неэвклидовой геометрии связана с именем Римана.

Бернгард Риман родился в 1826 году, как раз в тот год, когда в Казани Лобачевский читал свой доклад.

...Ньютон родился в год, когда умер Галилей. А Эйнштейн — в тот год, когда умер Максвелл.

Каждый раз, когда случаются подобные совмещения событий, трудно удержаться и не упомянуть о них.

И невольно настраиваешь себя на то, что в науке и культуре есть не только преемственность и непрерывность в развитии идей, но и некая как-то предопределенная преемственность самих ученых, носителей идей. И что судьба мудра и не так уж безразлична к роду человеческому.

И хотя ты понимаешь, что такие совпадения — не более, чем игра случая, все равно они не могут не трогать.

Так или иначе, но Риман родился именно в 1826 году. Он был вторым ребенком в большой семье сельского пастора, имевшего приход в деревне Бреселенц, близ Донненбурга, в королевстве Ганновер.

Семья жила бедно, постоянно нуждалась. Но главной целью родителей было, несмотря ни на что, дать серьезное образование детям. Сперва с ними занимался сам отец, а потом, когда Бернгарду исполнилось десять лет, в доме появился учитель.

Известно, что Гоген лишь к тридцати годам стал настоящим живописцем. До того он был и матросом и лоцманом на кораблях дальнего плавания, и банковским служащим. Только прожив половину жизни, он понял, в чем его истинное призвание.

Примерно в том же возрасте Бородин, профессор-химик, знакомится с Балакиревым и вступает в его кружок, вошедший в историю под именем «Могучей кучки»; писать музыку Бородин начал, когда большая часть жизни осталась позади.

Но сильное математическое дарование, если оно есть, наверное, чаще всего проявляется очень рано; так рано, когда ни о каком осознанном выборе пути, конечно, и речи быть не может. В те годы, когда мышление ребенка предельно конкретно и образно, когда мир воспринимается лишь в окружающих конкретностях, внезапно детскую голову неведомо как заполняют абстракции: цифры, геометрические фигуры. Пятилетний Янош Бояи задумывается о бесконечности, трехлетний Гаусс находит ошибку в расчетах отца.

Психологи и физиологи когда-нибудь разрешат эту тайну человеческого мозга, пока же факт остается фактом.

Риман не был исключением среди своих гениальных собратьев. Очень рано самым большим его удовольствием было придумывать сложные математические задачи, над решением которых потом долго бились его сестры. Их домашний учитель вспоминал, как ему приходилось напрягаться, чтобы только лишь успевать следить за теми быстрыми и часто лучшими решениями задач, которые находил его ученик.

В тринадцать лет Риман покинул родительский дом. Теперь он сможет возвращаться сюда лишь на недолгие каникулярные сроки. Но привязанность к семье, глубокая и нежная любовь к родным нисколько не ослабеет в нем ни с расстоянием, ни с годами. С отцом, братом, сестрами делится он планами, рассказывает им обо всех больших и малых событиях своей жизни.

Для посторонних Риман будет сдержанным и замкнутым. Он никогда не сумеет до конца преодолеть застенчивость, некоторую робость в отношениях с окружающими. Существует даже мнение, что замкнутость сыграла добрую роль в судьбе Римана. В те одинокие часы, которых было больше чем достаточно в его жизни, и начался этот непрерывный, ничем не стесняемый, свободный от давления, от предвзятости процесс мышления, смелый полет мысли, который привел Римана к его замечательным открытиям. Может быть... Но сам Риман часто страдал от неумения сближаться с людьми. Потому что он никогда не был к ним безразличен, а наоборот — полон интереса и доброжелательности.

Итак, тринадцатилетний Риман попадает в Ганновер, где жила его бабушка, и начинает учиться в тамошнем лицее. А через два года переезжает в Люнебург и поступает в гимназию.

Математическая одаренность мальчика и здесь сразу бросилась в глаза. Директор гимназии потом вспоминал:

«В первый же год учения Бернгард попросил разрешить ему брать книги из моей библиотеки:

— Мне это доставит большое удовольствие, если только они не будут слишком легкими, — добавил он.

Я показал ему полку с книгами, и он выбрал «Теорию чисел» Лежандра. Я сказал:

— Постарайся разобраться в ней, насколько сможешь.

Это было в пятницу после обеда. Он вернул книгу в следующую среду.

— Много ли ты прочел? — спросил я.

— Все, — ответил он. — Это замечательная книга.

На экзамене я нарочно дал ему задачу из «Теории чисел». И хотя Риман больше не брал книгу в руки, он решил задачу так, словно специально по ней готовился к экзамену. Теория чисел имела особую прелесть для него. Он прочел и «Геометрию» Лежандра и перерешал массу геометрических задач из книг моей библиотеки. К этому времени он уже настолько знал математику, что учителя чувствовали себя нищими по сравнению с ним.

У него был просто невероятный дар отдаваться творческой фантазии и вместе с тем его отличала исключительная способность к абстрактным обобщениям».

Оба эти свойства мышления Римана, столь рано и сильно проявившиеся, что уже в гимназии не могли не обратить на себя внимания вдумчивого педагога, внесли свой равный вклад в будущее творчество ученого. Оба, а точнее — комбинации их, хотя на поверхностный взгляд может показаться, что свойства эти мало совместимы, даже исключают друг друга. Но лишь на поверхностный взгляд. Стоит вспомнить хотя бы Эйнштейна, в котором тоже так неповторимо удачно сочетались научная фантазия редкой смелости и способность к самым абстрактным логическим конструкциям, к широким обобщениям. Вообще в характере мышления Римана и Эйнштейна было много общего, может поэтому творчество Римана стало таким близким и необходимым создателю теории относительности.

Даже в изучении тех предметов, которые не давались Риману так же легко, как математика, сказывалось своеобразие его ума. Он испытывал трудности, когда писал сочинения, — и по немецкому языку и по латыни. Он никогда не мог быстро и сразу найти окончательный вариант. Напишет несколько строк, потом приходят новые мысли... Неудовлетворенный, он снова и снова начинает с начала...

В 1846 году Риман оканчивает гимназию и становится студентом факультета филологии и теологии Геттингенского университета.

Риман — филолог и богослов? После того, что мы о нем узнали, такое кажется странным, даже противоестественным. Наверное, и сам Риман думал так же. Хотя поступок этот был добровольный, Риман, скрепя сердце, решился на него. Обремененная детьми семья по-прежнему бедствовала, а карьера ученого не сулила материальных благ. Надо было выбрать профессию, которая хоть в будущем даст возможность помогать родным.

Но, конечно, этот странный филолог не мог отказать себе в том, чтобы сверх своих курсов слушать лекции по математике и физике. Скоро не только он сам, но и близкие убеждаются, насколько неодолимы его склонности, и отец освобождает сына от обещания стать пастором.

Получив разрешение следовать своим путем, Риман снова совершает странный поступок. Он оставляет Геттинген и переезжает в Берлин.

Фаркаш Бояи мечтал, что сын его станет учеником Гаусса. Такая удача выпала Риману. Почему же он, решив посвятить себя математике, покинул Геттингенский университет, где кафедру математики занимал именно Гаусс?

Причина проста: Гаусс читал лекции только по элементарным, большей частью прикладным вопросам математики. Знания Римана, его багаж после самостоятельных занятий в гимназии были куда богаче и обширней того, что ему давали в университете. А о своих собственных работах Гаусс и не помышлял сообщать студентам.

Ученый и учитель — не тождественные понятия. Быть подлинным учителем — особый талант. Не всякому это дано — суметь собрать вокруг себя учеников, вырастить их, создать свою научную школу. Создание школы обязательно — и прежде всего — предполагает самый тесный контакт, самое глубокое общение.

Но школы не возникает, если профессор отгорожен от студентов высокой стеной своего авторитета.

В немецких университетах того времени профессура, как и полагалось по существовавшим традициям, держалась замкнутой кастой. И Геттингенский университет не был исключением.

Зато Берлинский университет в те годы был совсем иным. Два выдающихся математика, Якоби и Дирихле, обсуждали на лекциях не только уже решенные задачи, но и новейшие идеи, те, что занимали научный мир и были предметом их собственных поисков и открытий.

Рассказы о стиле Берлинского университета, естественно, доходили до студентов других германских городов. Берлин становился притягательным центром.

Как ни странно, обычно застенчивый Риман сразу познакомился с Якоби и Дирихле и почувствовал себя свободно со своими новыми учителями — такова была атмосфера, созданная этими учеными. Он часто присутствовал при дискуссиях между ними; и многое указывает на то, что в эти годы стали зарождаться главные идеи и направления в творчестве Римана.

Пролетели два счастливых и плодотворных года, и Риман, полный замыслов, возвращается в Геттинген.

Наряду с собственной работой Риман еще слушает некоторые курсы, естественные и философские, с наибольшим интересом — лекции профессора Вебера по экспериментальной физике.

...В Геттингене стоит скульптура: Гаусс и Вильгельм Вебер создают электрический телеграф. Гаусс дарил доверием и откровенностью своего младшего собрата по науке. В свою очередь Вебер с глубокой заинтересованностью и любовью относился к Риману. Он стал его другом и в дальнейшем многое сделал для популяризации его идей и открытий — Вебер пережил своего ученика.

Этот человек интересен нам и потому, что на его глазах развивались отношения Гаусса и Римана и, пожалуй, только благодаря ему мы можем хотя бы немного узнать об истинной позиции Гаусса, хоть слегка заглянуть в мир его чувств.

Риман еще продолжает учиться, кроме того, он делает первые шаги на педагогическом поприще как участник и ассистент физико-математического семинара, организованного Вебером, — читает для начинающих студентов отдельные лекции по физике, помогает в демонстрации опытов. Но больше всего и прежде всего занят он теперь исследовательской работой. Обдуман и пишется большой труд: «Основы общей теории функций комплексного переменного».

Содержание этой работы здесь излагать не стоит даже самым кратким образом — все равно обо всем рассказать нельзя. Хотелось бы лишь напомнить одну вещь: функции, функциональные отношения и зависимости играют в науках огромную роль, причем в физике не меньшую, чем в математике. По существу все физические явления и процессы описываются с помощью функций. Теоретические исследования в физике — это главным образом розыски и анализ связей между явлениями, то есть исследование различных функциональных зависимостей. Поэтому все, что касается теории функций, в частности — различных способов математического их выражения (к примеру, запись функций в форме степенных рядов, что характерно для функций комплексного переменного), все это неизменно привлекало и привлекает интерес и внимание. Эта область математики и математической физики издавна считается одним из главных, магистральных направлений в науке. И работы Римана по теории функций принадлежат к числу основополагающих.

К концу 1851 года Риман завершает свое исследование, и оно становится его докторской диссертацией. Преодолевает он и преследующий его страх перед публичностью, перед необходимостью готовить работу для печати.

Труд Римана получил высокую оценку Гаусса. Гаусса поразили «глубокое проникновение в предмет исследования, полная оригинальность и необычайная прозрачность изложения». В разговоре с Риманом Гаусс между прочим заметил, что он сам в течение ряда лет готовил мемуар на эту же тему.

«Я надеюсь, что теперь, благодаря окончанию диссертации, мое положение существенно улучшится, — сообщил Риман отцу, — я также надеюсь, что со временем научусь писать свободнее и быстрее, и тогда расширится круг моего общения и я получу возможность выступать с докладами».

Риман по-прежнему встревожен трудным положением семьи. Он просит прощения за расходы, которые из-за него несет отец. Он винится, что не проявил достаточной настойчивости, чтобы занять вакантное место наблюдателя в обсерватории.

Но дело было вовсе не в настойчивости Римана. Как потом рассказал Вебер, Гаусс, директор обсерватории, не захотел, чтобы Риман занял это место. Нет, не сомнения в способностях Римана были тому причиной. А опасение, как говорил Вебер, что «связанные с этой должностью трудоемкие и частично неупорядоченные обязанности затронут и его, Гаусса, поле деятельности». Гаусс ревниво оберегал свое «жизненное пространство» от вторжения.

Так Риман опять остался без постоянной должности, а значит и без средств к существованию. Это тихое и медленное умирание с голоду, на которое Риман оказался обреченным, привело к неизлечимой чахотке. Отягощенная предельно напряженной умственной работой, болезнь оборвала его жизнь на сороковом году.

«Пробная лекция»

Не попав в обсерваторию, Риман спустя некоторое время делает еще одну попытку упрочить свое положение — он старается получить место приват-доцента. Это обязательная ступенька к профессуре. А кроме того, хоть какой-то выход из нищеты. Правда, жалкий выход. Жалованье приват-доцента складывалось из оплаты лекций теми студентами, которые слушали курс. А приват-доцентам редко удавалось читать курсы лекций, и число слушателей не превышало числа пальцев на руке. Но Риман, доктор наук, больше не мог обременять отца дополнительными расходами. Он берется за конкурсную работу для получения должности.

Осенью пятьдесят второго года в Геттинген из Берлина приехал на каникулы Дирихле — «второй после Гаусса из ныне живущих математиков», — как сообщает Риман отцу.— «Дирихле пробыл у меня утром около двух часов. Он сделал важные замечания к моей конкурсной работе. Они были настолько полными, что существенно облегчили ее написание. Он держался со мной так дружелюбно, что при огромной разнице в нашем положении, я даже и ожидать не мог такого».

Конкурсная работа была закончена через год с небольшим. Теперь, по существующему статуту, соискателю предстояло прочесть перед членами коллегии факультета так называемую «пробную лекцию». Кандидат на должность предлагает для лекции три темы по своему усмотрению, коллегия выбирает одну из них.

Как и требовалось, Риман назвал три темы. Первые две входили в круг основных проблем, которыми тогда занимались математики, третья лежала несколько в стороне. Первые две говорили о методах представления функций с помощью тригонометрических рядов, третья касалась основ геометрии. Наконец, первые две работы были у Римана почти готовы, в третьей лишь намечены основные идеи.

Риман был уверен, что ему придется читать одну из двух первых. Гаусс выбрал третью.

Почему? Обратимся снова к свидетельству Вебера: «Гаусс не без умысла выбрал именно данную тему из трех, предложенных Риманом. Он сам признавался, что ему страстно хотелось услышать, как такой молодой человек сумеет найти выход из столь трудной игры».

Форма изложения лекции (о содержании ее речь впереди) и посейчас удивляет, даже интригует математиков. Лектор мог свободно обойтись без доски и мела. Вместо скрупулезных вычислений (лекция-то по математике!) даны лишь некоторые конечные результаты, да и суть, собственно, не в них. Суть — в идеях, предложенных автором, в ходе и развитии его мысли.

По мнению одних, Риман построил свою лекцию так, чтобы сделать ее понятной всем членам коллегии, а не

Бернгард Риман.

Геттинген.
Университет.

только математикам. Конечно, он сильно усложнил себе задачу: объяснить неспециалистам совершенно новые идеи, да еще без привычных, математических лесов, да еще не снижая уровня и строгости изложения — дело крайне нелегкое.

Существует и совершенно противоположная точка зрения: Риман вовсе не думал о членах коллегии. Даже и обо всех математиках не думал. Лекция была прочитана только для Гаусса, рассчитана на него одного. А для Гаусса и не нужны были выкладки, главное — донести содержание, ход мысли.

Какое из этих предположений более правильно? И то и другое достаточно психологически убедительны. А истины нам, вероятно, не суждено узнать.

Уже говорилось, что Риман был замкнут, сдержан и застенчив с окружающими. Таким он остался до конца жизни. Только со своими родными бывал он откровенен, только перед ними обнажал свои чувства. Больше того, с ними, не имеющими никакого отношения к науке, делился Риман планами исследований, посвящал их в замыслы и результаты своих работ. Эти живые свидетельства, вероятно, интереснее всяких домыслов и предположений, даже самых правдоподобных. Обратимся к письмам, которые писал он в эти месяцы брату Вильгельму.

23 декабря 1853 года Риман пишет как раз о темах для пробной лекции: «Две первые у меня были готовы, и я надеялся, что будет выбрана одна из них. Однако Гаусс выбрал третью, и теперь я снова в затруднительном положении, так как должен ее еще доработать. Мои другие исследования о связи между электричеством, магнетизмом, светом и тяготением я стал продолжать сразу после окончания конкурсной работы и пошел уже так далеко, что смогу их скоро опубликовать. Для меня становится все более очевидно, что Гаусс уже много лет работает над тем же самым, и несколько друзей, среди которых Вебер, под строгим секретом посвящены в это. Тебе я могу писать, не опасаясь, что меня обвинят в дерзости и самомнении — я надеюсь, что мое время еще придет, и станет известно, что я все нашел совершенно самостоятельно».

26 июня следующего года он пишет брату, что исследования по связи между основными физическими законами настолько захватили его, что он никак не мог

приступить к работе над темой пробной лекции. Мешало ему и другое: «Усталость, умственное напряжение, отсутствие воздуха, старый недуг... Летом поправился. Четырнадцать дней после пасхи занимался другой работой, а потом взялся за пробную лекцию и к троице окончил ее... В последнее время здоровье Гаусса стало настолько плохим, что опасаются его смерти уже в этом году, и он сам чувствует себя слишком слабым, чтобы меня проэкзаменовать. Так как я должен начать читать лекции только со следующего семестра, он хочет, чтобы я подождал хотя бы до августа улучшения его самочувствия. Я уже примирился с этим. Но после моей повторной просьбы в пятницу днем на троицу, он внезапно решил, чтобы «с плеч долой», как он выразился, назначить коллегию на завтра на половину одиннадцатого, и таким образом в субботу я был счастлив наконец с этим развязаться... Несколько слов о другой работе, которой я был занят на пасху. На пасхальные каникулы по приглашению Вебера к нему приехал Кольрауш, который сейчас профессор в Марбурге, чтобы вместе с ним провести экспериментальные исследования электричества. Я принимал участие в эксперименте и таким образом получил возможность познакомиться с Кольраушем. Кольрауш только недавно провел точные измерения электрического сопротивления лейденской банки; он опубликовал результаты, и я нашел им объяснение в своих общих исследованиях соотношений между электричеством, светом и магнетизмом. Я говорил об этом с Кольраушем, и он попросил меня разработать теорию явления и прислать ему. Я так и сделал. Кольрауш мне очень дружески ответил, предложил передать работу для опубликования в «Анналах физики и химии» и пригласил меня осенью посетить его, чтобы продолжить работу. Для меня это важно потому, что впервые оказалось возможным применить мою работу к явлениям, неизвестным раньше».

Итак, может быть еще одно объяснение странной формы пробной лекции. Риман просто не ожидал и не думал, что будет выбрана именно эта тема. Поэтому он и не стал ее разрабатывать детально, с подробными математическими выкладками. А потом, когда выбор Гаусса пал именно на нее, может, у Римана не оставалось достаточно времени на детальную разработку. А скорее всего, он посчитал это просто ненужным. Гораздо важнее и значительней были сами идеи, их точная формулировка и главное — раскрытие их сути, не «запрятанной» в математические выкладки. Так поставленную перед собой задачу — а хочется думать, что это было сознательным решением, — Риман выполнил блестяще.

И если спектакль на самом деле разыгрывался для одного зрителя, то успех его был ошеломляющим. Правда, неизвестно, догадался ли об этом кто-нибудь, в том числе и сам Риман. Потому что не было рукоплесканий. И вслух не было сказано ни слова одобрения. Гаусс молча поднялся и тихо побрел к выходу.

Какие чувства обуревали в тот день старого Гаусса, стало известно лишь много лет спустя, когда умер не только он, но и Риман. Вильгельм Вебер рассказал, что лекция превзошла все ожидания Гаусса. Она привела его «в состояние наивысшего изумления» и, возвращаясь с заседания факультета, он отозвался о ней с «высшей похвалой» и «с редчайшим для него воодушевлением» говорил Веберу о «глубине мысли Римана».

Постараемся и мы, поверив авторитету Гаусса, если не оценить «глубину мысли Римана», то хотя бы составить себе представление о том, что ныне называют римановой геометрией.

Миры римановой геометрии

Риман назвал свою лекцию «О гипотезах, лежащих в основании геометрии».

— Общеизвестно, — начал он, — что геометрия предполагает заданными заранее как понятие пространства, так и первые основные понятия, которые необходимы для выполнения пространственных построений. Она дает номинальные определения понятий, тогда как существенные свойства определяемых объектов входят в форме аксиом.

Так в нескольких словах Риман напомнил принцип построения геометрии: «первые основные понятия» — мы привыкли называть их «определениями» — действительно задаются сразу, заранее; и самые существенные их свойства так же заранее определяются аксиомами.

Это и вправду общеизвестно — в том числе, вероятно, было известно и членам коллегии философского факультета. Тогда, может, и начинать с этого не стоило?

Но Риман вовсе не собирался вещать банальности. Он начал так лишь для того, чтобы высказать свое суждение о существующих основах геометрии.

Как мы помним, надежность камней, положенных в фундамент геометрии, вызвала доверие далеко не у всех. А как можно быть спокойным за прочность здания, если ненадежен фундамент?

— При этом, — подчеркивал и Риман, — взаимоотношения между этими предпосылками остаются невыясненными: не видно, является ли, и в какой степени, связь между ними необходимой; не видно так же a priori, возможна ли такая связь. Начиная от Эвклида и кончая Лежандром (я называю наиболее выдающегося из новейших исследователей основ геометрии), ни математиками, ни философами упомянутые неясности не были устранены.

Здесь хочется снова прервать Римана и отметить две вещи.

Во-первых, слова «кончая Лежандром» позволяют заключить, что Риман ничего не знал ни о Лобачевском, ни о Бояи. Даже идеи живущего с ним бок о бок Гаусса оставались, по-видимому, скрытыми от него.

Во-вторых, Римана, как и трех упомянутых математиков, как и некоторых их предшественников, также не удовлетворяют основания, на которых построена геометрия Эвклида. Но «формула обвинения» новая; у Римана свои претензии к основам ее, корень зла он видит в ином:

— Причина этому обстоятельству, как я полагаю, заключается в том, что общая концепция многократно протяженных величин, к которым относятся пространственные величины, осталась совсем не разработанной.

Отсюда естествен переход Римана к замыслу своей работы:

— Я поставил перед собой задачу — исходя из общего понятия о величине, сконструировать понятие многократно протяженной величины. Мы придем к заключению, что в многократно протяженной величине возможны различные мероопределения, и что пространство есть не что иное, как частный случай трижды протяженной величины.

В этом абзаце заключено очень большое содержание. Прежде всего ставится цель — сконструировать (иначе говоря, построить по законам математики и логики) на основании общего понятия о величине (то есть на очень широкой основе, потому что понятие величины много шире понятия пространственных величин — так, например, есть величина массы, величина силы, величина скорости, величина температуры, величина времени и многие другие типы величин, в том числе и чисто математического характера), классы так называемых «пространств» или многократно протяженных величин различного типа, таких, где единица измерения принадлежит к данному типу величин, а вовсе не есть непременно единица длины, как в обычном нашем пространстве.

Поэтому в таких «сконструированных» пространствах возможны различные «мероопределения», то есть различные законы построения и измерения фигур, иными словами, возможна разная геометрия.

И, наконец, слово «пространство» Риман оставляет только за нашим реальным пространством, в котором мы живем. Остальные же, построенные логически, он называет «многократно протяженные величины». Тем самым он четко отделил физическое рассмотрение окружающей нас природы от математического.

В этой связи Риман сразу же отвечает и на один из главнейших вопросов философии естествознания: можно ли геометрию нашего реального пространства получить чисто логическим путем, пользуясь лишь способностями нашего разума?

— Необходимым следствием отсюда является то, — говорит Риман, — что предложенная (то есть эвклидова) геометрия не выводится из общих свойств протяженных величин, и что, напротив, те свойства, которые выделяют пространство из других мыслимых трижды протяженных величин, могут быть почерпнуты не иначе как из опыта.

Итак, чистая математика никогда не сумеет сделать выбора и сказать, каково оно, истинное строение нашего пространства. Эту задачу в состоянии решить лишь физический эксперимент и расчеты, основанные на реальных, полученных из наблюдений характеристиках нашего мира.

Гёте писал: «Как бы человек видел солнце, если бы глаз его не был так похож на солнце?»

Хотя Гёте не только поэт, но и ученый, слова эти скорее поэтическая метафора. Но мозг человека, как показывает движение современной науки, действительно «видит» гораздо больше, чем видит глаз. Видит и невидимое, принципиально не поддающееся непосредственному наблюдению. Видит до опыта, предвосхищая эксперимент. Способен так видеть потому, что он, созданный миллионнолетним развитием природы, есть часть ее, едва ли не самая совершенная.

В лекции Римана, как прежде в трудах Лобачевского и Бояи, человечество выходило из рамок плоского трехмерного мира. Оно, пусть пока в математических символах, открывало для себя новые пространства — может, одно из них и окажется истинным пространством Вселенной. Мир науки, а значит и мир людей становился богаче и шире. В этом смысл и значение лекции Римана. В этом глубокая красота ее.

Из слушателей этот смысл и красоту мог оценить один лишь Гаусс, а из всех людей на земле — вероятно, еще Лобачевский и Бояи. Как бы отлично получилось, окажись они все в тот день в Геттингене. Но история не часто бывает хорошим режиссером...

Тысячелетиями мир наш со всей его сложностью оставался словно спрятанным от человечества шапкой-невидимкой. Чтобы попасть в этот мир, надо было угадать мозгом, как сердцем угадал поэт, что и «невозможное возможно».

Риман поверил в возможность разных пространств, снял с них шапку-«видимку»; тут сказочное сравнение уместно, потому что открытие его было тогда фантастично, как сказка.

Риман рассказывал эту сказку одному слушателю, Гауссу, зачарованному ею. Теперь к ней, к этой мудрой сказке, должны приобщиться и мы. Но как трудно такое приобщение!

Очень трудно этот сверхсложный мир сделать понятным для нас, потомственных жителей эвклидова мира. Правда, однажды мы с вами уже предприняли попытку вырваться из мира Эвклида и совершить путешествие в чуждый и таинственный мир Лобачевского. Нынешнее путешествие будет еще тяжелей. Но отважимся на него.

Нам придется сразу же погрузиться в самую отвлеченную математику.

Вспомним еще раз, что хотел сделать Риман для «исправления» геометрии, какой фундамент считал он необходимым и обязательным подвести под нее:

— Я поставил перед собой задачу, — сказал он, — исходя из общего понятия величины, сконструировать понятие многократно протяженной величины.

Многократно протяженные величины — познакомимся с ними.

Берем карандаш, ставим на лист бумаги. И проводим линию. Что мы получили? Линию, естественно. А по терминологии Римана — однократно протяженную величину.

Теперь — это проделаем уже мысленно — возьмем в руки оба конца этой линии и потянем ее на себя. Последовательное и непрерывное перемещение линии образует поверхность. А по Риману — дважды протяженную величину.

Теперь начнем перемещать уже эту поверхность, например, будем опускать ее вниз. Непрерывное и последовательное перемещение поверхности дает нам объем, то есть некую часть пространства. Риман сказал бы — трижды протяженную величину.

К сожалению, мы не можем подобным же образом построить четырежды протяженную величину. А Риман свободно оперирует с ней, потому что она есть естественное обобщение предыдущих случаев. Поэтому нам лучше всего последовать за Риманом и посмотреть, как он будет «конструировать» свои многократно протяженные величины, как разрешит поставленную самому себе задачу.

Некоторые считают, что идеи, которыми наполнена «пробная лекция», носились в воздухе, ими была насыщена атмосфера Геттингена. Считают, что открытие уже созрело и лишь ждало кристаллизации. Отсюда удивление, что не Гаусс оказался его творцом. В этом смысле говорят, будто Риман отдал человечеству то, что задолжал ему Гаусс.

Однако никак нельзя сказать, что Риман стал душеприказчиком старого геттингенца. Наоборот, всем известно, что общались они крайне мало. И Риман никогда не был в числе тех немногих приближенных, с которыми король математики делился сокровенными мыслями. Может, до него доходили слухи о том, что Гаусс измерял углы какого-то треугольника. Может быть... В двадцатых годах, когда Гаусс был занят геодезической съемкой королевства Ганновер, он задумал проверить — нельзя ли здесь, на Земле, опровергнуть пятый постулат. Для этой цели он измерил углы мысленно построенного им треугольника, вершины которого лежали на вершинах трех гор — Инзельсберг, Брокен и Хохер Хаген. Какова будет сумма углов, не окажется ли она меньше двух прямых? Вот что волновало Гаусса.

Конечно, результат получился отрицательный. Теперь мы знаем — наивно было думать, что для столь малых расстояний он окажется иным.

Хотя измерение Гаусс производил в глубокой тайне, возможно, спустя тридцать лет Риман случайно узнал о нем, равно как и об отрицательном его результате. Но это не больше чем догадка. Скорее всего, из творчества Гаусса Риман знал лишь то, что было опубликовано.

Когда Гаусс занимался геодезией, он создал одно из замечательных своих творений — теорию поверхностей и изложил ее в капитальном труде: «Общие исследования кривых поверхностей».

Поверхности. Мы встречаемся с ними на каждом шагу. Можно построить или зрительно представить себе огромное их количество — самой различной формы.

Простейшая — плоскость: знакомая нам с детства плоская поверхность пола, стола, шахматной доски.

Вырежем квадрат, или треугольник, или круг. Положим их на стол и начнем поворачивать, крутить, передвигать с места на место. При всех этих манипуляциях ничего не произойдет; ни одна из этих фигур не изменит своей формы — не растянется и не сожмется, не согнется и не перекосится, и по-прежнему всеми своими частями будет прилегать к плоскости стола.

Теперь попробуем те же квадрат, треугольник и круг, даже просто любой листок бумаги наложить на другую, не менее знакомую нам с детства поверхность — на поверхность шара. Оказывается, все они будут «сидеть» на шаре, как плохо сшитая одежда — топорщиться, отставать, собираться в складки.

Причина отыскивается сразу: плоскость — плоская, и фигуры наши тоже плоские, а шар изогнутый, поверхность его имеет кривизну. Добавим, что кривизна таких выпуклых поверхностей считается положительной, имеет знак «плюс».

Слово «кривизна» играет в геометрии очень большую роль. Для характеристики линий и поверхностей, для их описания понятие это в каком-то смысле решающее. Например, кривизна прямой во всех ее точках равна, естественно, нулю. То же будет и для плоскости.

И окружность и шар имеют одинаковую в каждой точке, положительную кривизну. Однако, в отличие от нулевой кривизны, положительная кривизна может принимать разные значения. Чем оно больше, тем сильнее искривлена окружность или поверхность шара. Поэтому для описания окружности или сферы необходимо указать величину их кривизны.

Правда, математики не говорят: «кривизна шара имеет такую-то величину». Они скажут: «этот шар такого-то радиуса». Радиус шара и есть радиус кривизны его поверхности. А кривизна и радиус кривизны — величины обратные: чем больше радиус, тем меньше кривизна, и наоборот. У плоскости радиус кривизны становится бесконечным, а кривизна равна нулю.

Кривизна — это внутреннее, присущее поверхности свойство; можно было бы сказать: как человеку присущ его характер или цвет глаз. Но нет, так сказать нельзя. Кривизна — это основополагающее свойство поверхности. Именно с ней связаны, ею определяются законы геометрии, которая действует на данной поверхности. Уж если искать аналогию, то лучше сравнить кривизну со свойством человека быть человеком, homo sapiens, а не представителем другого вида млекопитающих. А вот уж численное значение кривизны или величины ей обратной — радиуса кривизны — можно сравнивать с характером человека. Если кривые и поверхности имеют сложную форму, то кривизна их может меняться от точки к точке. Поэтому, чтобы описывать такие кривые, надо или иметь величину радиуса кривизны в каждой точке, или знать закон, по которому эта величина меняется.

Так как поверхности есть более сложные образования, чем кривые,— они имеют не одно, а два измерения,— то и понятие кривизны для них усложняется. Гаусс нашел, как описывать любую поверхность самой произвольной формы. Существенную роль в описании играет, конечно, кривизна. Лучше всего для этой цели применять так называемую гауссову, или полную, кривизну. Не будем объяснять подробно и строго, что это такое, постараемся дать о ней лишь некоторое представление.

Если поверхность рассечь двумя взаимно перпендикулярными плоскостями, причем таким образом, что одна кривая пересечения плоскости с поверхностью будет иметь в точке пересечения наибольшую для этой точки кривизну, то окажется, что кривая пересечения, лежащая в перпендикулярной плоскости, автоматически будет иметь наименьшую кривизну. Произведение этих кривизн — наибольшей и наименьшей — и называется полной, или гауссовой, кривизной. А радиусы кривизны этих двух кривых в точке их пересечения называются главными радиусами кривизны.

После этого небольшого экскурса в теорию поверхностей вернемся к известным нам объектам. Например, сечение плоскости плоскостями всегда дает прямые. Кривизна прямой всегда равна нулю. Значит, кривизна плоскости тоже всегда равна нулю. И полная кривизна цилиндрической поверхности тоже равна нулю, хотя это может показаться странным на первый взгляд. Но если мы для определения ее поступим известным уже образом, то увидим, что одно из взаимно перпендикулярных сечений даст нам окружность (сечение, перпендикулярное образующей цилиндра), а второе — прямую (сечение по образующей). Кривизна первой будет положительной, а второй — нулевой. Ясно, что их произведение даст нуль.

В связи с этим надо отметить главное свойство гауссовой кривизны — величина ее не меняется при любом изгибании поверхности, если только последняя при этом не будет растягиваться или сжиматься. Цилиндр можно разрезать по образующей и развернуть — он превратится в кусок плоскости, где кривизна, что видно и невооруженным глазом, равна нулю.

У шара обе кривизны всегда положительны. Значит, будет положительной и полная кривизна.

В этой книге мы познакомимся с целым классом поверхностей постоянной отрицательной кривизны — с псевдосферическими поверхностями. Понятно и их название: «ложная сфера», «сфера наоборот», «антисфера» — так можно его перевести. Как и у шара, у псевдосферических поверхностей постоянная кривизна. Только знак кривизны противоположный, «минус», а не «плюс». Это получается потому, что два главных радиуса всегда имеют противоположные знаки — один «плюс», а другой «минус». Естественно, что и произведение их всегда будет отрицательным.

Одна из таких псевдосферических поверхностей похожа на седло. Здесь особенно наглядно видно, что если одна кривая сечения будет выпуклой, с положительной кривизной, то перпендикулярная ей кривизна окажется обязательно вогнутой — с отрицательной кривизной.

Шар тоже можно «одеть» в ладно сидящую на нем одежду — сшитую из тех же треугольников, например. Точнее — из тех, да не совсем. Не из обычных «плоских» треугольников, а из так называемых сферических, выпуклых; они отличаются от плоских тем, что стороны их — отрезки дуги, а не прямой, и что сумма их углов больше 180°. Если кривизна поверхности такого треугольника будет та же, что и у шара, то он отлично уляжется на шаре, и с ним можно будет делать все, что угодно, — двигать, вращать — он по-прежнему будет соприкасаться с поверхностью шара всеми своими точками.

Но зато на плоскости или даже на сферической поверхности другого радиуса такой треугольник почувствует себя неуютно; его придется деформировать или разрезать, чтобы наложить на «чужую» поверхность.

Эти взаимоотношения сферических поверхностей с плоскостью давно уже были известны математикам. Неожиданным оказался характер псевдосфер. И не потому, что им не «подходят» ни плоские фигуры, ни сферические — чему тут удивляться. Удивительно было то, что им впору пришлась одежда, словно присланная из другого мира, одежда, скроенная из необычного материала — из кусков плоскости Лобачевского.

Если вырезать кусок из гиперболической плоскости и наложить его на поверхность псевдосферы, получится полное прилегание. Этот кусок можно спокойно и безбоязненно вращать и передвигать — он будет всюду чувствовать себя на месте.

Учение о поверхностях — большая заслуга Гаусса перед математикой. Особенно плодотворна главная его идея — изучать и описывать любую, сколь угодно сложную поверхность, опираясь на характеристики бесконечно малых ее элементов.

Но в теории Гаусса, несмотря на ее широту и общность, содержались и ограничения.

Какие?

Прежде всего, Гаусс рассматривает лишь поверхности, то есть области двух измерений. Конечно, Гаусс и не ставил перед собой иной цели, ведь сочинение его так и называется — «Общие исследования кривых поверхностей». Так что, казалось бы, и спроса нет.

Но как все-таки быть с трехмерным объектом, с пространством — или даже с пространствами? Можно ли тут употреблять множественное число? Можно ли говорить о кривизне? Гаусс не дает ответа.

Бесспорно, это лежит вне темы сочинения Гаусса. Но разве это лежало вне круга его интересов? Мы-то знаем, что мысли о неэвклидовой геометрии занимали Гаусса постоянно. Значит, он понимал, что кривизна может быть присуща не только поверхности, но и пространству. И что пространство поэтому может быть не только эвклидовым — эвклидова кривизна равна нулю, — но и каким-то иным. То есть понимал, что логически возможно существование не одного, а двух, даже нескольких пространств...

Таково первое ограничение. Но есть и второе. Гаусс рассматривает поверхности как находящиеся в трехмерном эвклидовом пространстве, или, по словам Эйнштейна, как вложенные в эвклидово пространство. Действительно, все известные нам поверхности — двумерные образования — существуют в нашем обычном мире, но ведь на каждой из поверхностей царит своя геометрия (к примеру, еще древним были известны законы геометрии поверхности шара), и именно это определяет характер поверхности, а совсем не то, что она находится в пространстве Эвклида. «Связывание» поверхности с эвклидовым пространством есть некоторое ограничение, и поэтому — нарушение общности подхода к задаче.

Было ли сочинение Гаусса о поверхностях трамплином для теории Римана? Вне сомнения, было. Но для того и трамплин, чтобы прыгнуть как можно дальше.

Свою всеобъемлющую, по существу, геометрию Риман развил из двух генеральных идей. Со временем математики разглядели, что генеральные идеи были гениальными идеями.

Прежде всего Риман отбросил ограничения при описании геометрических объектов — в этом суть первой из его идей. Тем самым он сумел достичь высокой степени общности в истолковании принципов и законов геометрии.

Начнем с того места, где остановился Гаусс. Что нового вносит Риман в понятие поверхности — «дважды протяженной величины» по его терминологии? В самом наименовании в какой-то степени содержится ответ.

Мы видели, какими разными бывают поверхности — от простейшей плоскости, до самых сложных, и внешний вид и геометрия которых меняется от точки к точке. Общее у них только одно: все они «дважды протяженные величины».

Тогда разве не правильней рассматривать эти образования двух измерений сами по себе, исходя из их внутренних свойств, из присущей им геометрии? Разве обязательно, как это делает Гаусс, связывать их с пространством Эвклида?

Конечно, огромное их количество может быть построено, как говорят математики — осуществлено в виде поверхностей, находящихся в эвклидовом пространстве; их вполне описывает теория Гаусса.

Но ведь есть и такие, которые целиком в эвклидовом пространстве не осуществляются. Мы теперь знаем, что в нем, например, нельзя построить — всю целиком — бесконечную плоскость Лобачевского. На псевдосферических поверхностях, принадлежащих пространству Эвклида, можно «уложить» лишь куски плоскости Лобачевского.

Значит, надо вырваться из эвклидова мира хотя бы для того, чтобы не упустить возможности встретить эти новые для науки творения... Чего? Природы, человеческой мысли? К этому вопросу вопросов мы возвратимся не раз.

Во все времена настоящего ученого никогда не покидает одно ощущение: как бы ни были сложны и неожиданны открывшиеся ему тайны мироздания, то, что сокрыто — или пока сокрыто — неожиданней и сложнее еще во сто крат. И это постоянное ожидание чего-то совершенно нового, готовность к встрече с ним есть истинная движущая сила науки.

Так всегда было и будет.

Природа часто не спешит раскрыть свои секреты и подтвердить догадку человеческого ума. Но раньше или позже сдается и она. Неожиданное, «противоестественное» становится бытом науки, сложное — простым и доступным даже рядовым служителям ее.

На многовековом своем пути, долгом и непрерывном, наука претерпевает и резкие скачки. Они связаны с фундаментальными открытиями и с переворотами в мышлении, в миропонимании.

Одним из таких скачков было создание неэвклидовой геометрии.

Общенаучное и философское значение этого открытия — в расширении поля зрения человечества, в возможности доопытного и внеопытного постижения мира — одной лишь силой мысли.

Конечно, тут не было ничего похожего на отрицание опытного познания природы вещей. Лобачевский верил в опыт, он знал, что придет время, и опыт скажет свое решающее слово. Но пока, могущественный в одном, опыт бессилен во многом другом, и здесь лидерство переходит к теории, к чистому мышлению.

У Римана сила абстрактной мысли была еще больше, мышление — еще шире и свободней, раскованней. Но за этим тоже стояла глубокая вера в опыт науки, опыт людей, в необходимость и неизбежность слияния этих двух форм познания.

Риман, конечно, предвидел и предчувствовал всю еще не раскрытую сложность нашего реального мира. И, может быть, именно это послужило подспудной причиной стремления его освободиться от сковывающих законов пространства Эвклида.

Риман хотел освободиться от ограничений и при решении частной задачи — при исследовании поверхностей.

Вот почему даже поверхности, находящиеся в эвклидовом пространстве, он предложил описывать, исходя исключительно из присущих им особенностей, из внутреннего их строения. Он как бы «изымал» их на время из знакомого обиталища и исследовал самих по себе.

Вдумаемся в слова «дважды протяженная величина»; уже сам только этот термин обещает расширение и обогащение геометрии.

Человечество давно, задолго до Римана, обжило наше пространство — трижды протяженную величину.

Но как существует множество поверхностей, так могут существовать, по крайней мере логически, и разные пространства, разные трижды протяженные величины— и это уже открытие Римана. Могут существовать и четырежды протяженные величины, вообще — многократно протяженные. Вспомним слова: «Я поставил перед собой задачу сконструировать понятие многократно протяженной величины».

Такая постановка задачи раскрыла богатые возможности для обобщения геометрии: в ней самой уже были заключены оба направления, на которых Риман стал строить свою геометрию.

Первое направление можно было, перефразируя Гаусса, назвать «общим исследованием кривых пространств»; здесь слово «пространство» означает трехмерное многообразие, или трижды протяженную величину. Тогда в эту семью попадает и наше родное плоское эвклидово пространство, и уже знакомое нам гиперболическое пространство, открытое Лобачевским, и разные другие. Одно из таких возможных пространств называет и сам Риман. Пройдет некоторое время, и наука с признательностью возьмет его в свой арсенал.

На втором направлении растет число измерений протяженности — четыре, пять, сколько угодно — «n», как говорят математики. Однократно протяженная величина — линия; дважды протяженная — поверхность; трижды протяженная — пространство. Для большего числа измерений специальных названий нет. Поэтому говорят, что многократные протяженности образуют так называемые «гиперпространства», или «сверхпространства» различных степеней: четырехмерное, пятимерное... n-мерное — по числу своих измерений.

Эти сверхпространства, в частности, подобно нашему эвклидову пространству, могут быть «плоскими», то есть иметь нулевую кривизну. Элементы теории плоских многомерных пространств разрабатывались геометрами и до Римана. Однако такие структуры никто не мог зрительно себе представить. Поэтому они не вызвали доверия у математиков. Их посчитали всего лишь условностями, совершенно нереальными.

Риман построил теорию n-кратно протяженных многообразий в виде естественного обобщения теории трехмерного пространства, точно так же, как во все века математики привыкли законы построения фигур в плоскости обобщать на пространство: круг в плоскости соответствует шару в пространстве; треугольник в плоскости может «развиваться» и в конус и в пирамиду, квадрат — в куб и цилиндр. Это самые простые примеры. Но и для сложных принцип остается тот же.

В отличие от своих предшественников, Риман не ограничивается «плоским случаем». Ведь как и поверхности, многократно протяженные величины вообще-то могут иметь какую угодно кривизну.

Так происходит смыкание обоих направлений, синтез их. Однако, как мы увидим вскоре, и это еще не финал того развития и расширения геометрии, которым она обязана Риману.

А пока постараемся сообразить, что же это такое — протяженная величина многих измерений, да еще некой, отличной от нуля кривизны?

Представить ее себе очень трудно. Вероятно, это опять абстракция, продукт чистой математики? Да, казалось бы, это все-таки лишь логически сконструированное пространство; таких нет и не может быть в реальной жизни, в реальной Вселенной.

Но вот появляется Минковский со своим четырехмерным миром пространства-времени: а затем Эйнштейн рассматривает этот четырехмерный мир, уже населенный материей, а потому не эвклидовый, не плоский, а обладающий кривизной...

Впрочем, мы забежали вперед на полвека. Вернемся пока в Геттинген, в июнь 1854 года.

Когда мы «примеряли одежду» различным поверхностям — плоской, сферическим, псевдосферическим, —

то убедились, что подходит лишь та, которая скроена из фигур, подчиняющихся непременному условию: кривизна их должна совпадать с кривизной поверхности. Тогда одежда будет сидеть ладно, не топорщась, без складок, прилегая к поверхности всеми частями. Такой материал можно любым образом прикладывать к поверхности, перемещать по ней, он всюду будет на месте. Наконец, из него можно выкроить мерки, эталоны и с их помощью производить различные измерения и построения на данной поверхности: строить фигуры, равные данным, большие, меньшие и их измерять.

Но, оказывается, существует и другой вид отношений в геометрии. Таких, когда плоской фигуре, например, разрешено находиться на шаре. Чтобы ей было удобнее сидеть на «чужой» поверхности, она может растянуться или собраться в складки. Единственное, что ей запрещено, это разорвать поверхность шара и оказаться, хотя бы частично, на внутренней его стороне. Или самой разорваться и склеиться каким-то другим образом.

Этот новый вид геометрических отношений определяется взаимным расположением фигур, а значит, словами «внутри», «вне», «между» и им подобными.

А первые, привычные нам отношения в геометрии, связаны с измерениями фигур. Поэтому для них типичны слова «равно», «меньше», «больше» — на столько-то единиц, во столько-то раз. Такие отношения Риман назвал метрическими, потому что главную роль в них играет метрика геометрических объектов.

Здесь «потому что» едва ли прозвучит убедительно — оно не разъяснило нам суть дела, скорее еще больше запутало нас. Ведь мы пока не знаем, что такое метрика.

Возьмем две точки на плоскости — любые, какие угодно. Нет ничего проще, чем определить расстояние между ними. Мы твердо усвоили со школы, что кратчайшее расстояние между двумя точками есть прямая. Приложи линейку и измеряй.

Теперь через эти же две точки проведем сферическую поверхность. На этой поверхности расстояние между нашими точками будет уже другое, большее. Мерить его придется дугой большого круга.

На псевдосферической поверхности, проведенной через эти же точки, оно снова будет иное и измеряться будет опять иначе. А для поверхностей еще какой-нибудь формы — отличное и от этих трех значений.

Все здесь сказанное можно отнести не только к поверхностям, но и к пространствам и к гиперпространствам.

Закон определения расстояния между двумя точками любого геометрического объекта — поверхности, пространства, гиперпространства — действительный всегда, где бы мы ни взяли эти две точки, и называется метрикой этого объекта.

Теперь понятно, что метрика действительно определяет все те главные свойства геометрического объекта, которые связаны с измерениями, то есть и кривизну и всю его геометрию. Не удивительно, что и слова «метрика» и «метр» имеют общее происхождение.

В своей лекции Риман четко разделил оба вида геометрических отношений. Тому, который заведует взаимным расположением фигур, посвящается первая часть лекции, а тому, который заведует измерениями, — вторая. Риман так и говорит:

— Мы начали с того, что отделили отношения протяженности (или взаимного расположения) от метрических отношений.

Последуем за Риманом и поговорим сначала о первом виде геометрических отношений. Риман называет их отношениями протяженности, или отношениями взаимного расположения. Второе название кажется нам более наглядным.

«Взаимное расположение фигур». Мы можем нарисовать одни фигуры внутри других. А эти поместить вне, где-нибудь в стороне. А между первой и второй группами расположить еще какую-нибудь фигуру. Так с карандашом в руках или мысленно можно строить самые разнообразные и произвольные комбинации фигур. Строить, не ставя никаких условий, не накладывая никаких ограничений. Кроме одного — каждая комбинация должна подчиняться одному из слов, как раз определяющих взаимное расположение фигур, то есть слов типа: «внутри», «вне», «между». Тем самым комбинация фигур сразу будет взята в определенные рамки и подчинена целой системе закономерностей.

Оставаясь в чем-то произвольной, рожденной игрой нашего ума или прихотью руки, она в то же время окажется подданной некоего геометрического царства, где правят «отношения взаимного расположения».

Это царство в какой-то мере было известно математикам уже давно и каждый крестил его по-своему. Так, чуть ли не триста лет назад Лейбниц придумал латинское имя analysis situs. В переводе это значит «анализ положений». Но во времена Лейбница не было еще никакой науки, изучающей взаимное расположение фигур, поэтому содержание термина было иное.

Риман тоже пользовался термином analysis situs. Он определял analysis situs как ту часть теории непрерывных величин, которая совершенно отвлекается от измерений и изучает только отношения взаимного расположения.

При словах «взаимное расположение» мы видим все те комбинации фигур, которые только что нарисовали. Но как ни странно, Риман говорит о «непрерывных величинах», вовсе не указывая, что это непременно должны быть геометрические фигуры.

Что это — забывчивость?

Или Риман просто не счел нужным подчеркивать вещи самоочевидные?

Ни то, ни другое.

Риман еще раз повторил свое определение. И снова сказал, что analysis situs есть часть учения о величинах, которая не зависит от измерений («от мероопределения»); но зато сами величины нельзя рассматривать не зависящими от их положения — они есть «области многообразия». И опять ни слова о том, что это есть величины геометрические.

Итак, остается заключить, что величины эти, как мыслил их Риман, сами по себе могут быть какими угодно. Природа их роли не играет. Но они непременно должны образовывать коллектив, сообщество — «многообразие», или «множество», по терминологии математиков. То есть должны быть связаны между собой. К этому сообществу предъявляется еще одно непременное требование — сообщество должно быть в известном смысле единым, монолитным, или, опять же по терминологии математиков, «непрерывным».

Смысл этого требования обретает особую наглядность, если посмотреть на геометрические фигуры. Тут нет никакого сомнения, что значит непрерывность, например, линии или поверхности.

Если вы разорвете геометрическую фигуру, то непрерывность нарушится в месте разрыва. То же произойдет, если вы ее как-то по-иному склеите. Две прежде разделенные расстоянием линии при этом смогут слиться в одну; то, что было «вне», окажется «внутри» — а такое, как мы знаем, запрещено. Зато всякие изгибания, сжатия, растяжения разрешены, потому что они не нарушают непрерывности.

Подобного же рода непрерывность должна соблюдаться для любой «колонии» величин, коль скоро она поселяется на территории государства analysis situs.

Любые величины?

Выходит, в лекции, посвященной основаниям геометрии, Риман отвлекается уже не только от измерений этого, казалось бы, единственного способа изучать геометрические объекты. «Я оставляю за собой право исследовать эти объекты способом, совершенно не зависящим от всякого измерения»,— заявляет он.

Риман считает необязательным и устойчивость, постоянство самих геометрических образов.

Больше того, он делает последний шаг — порывает вовсе с геометрическими объектами. Или рассматривает их как частный случай, как один из отрядов огромного воинства всяческих множеств, имя которому — непрерывные величины.

Что это — измена геометрии?

Как раз наоборот.

Это завоевание для геометрии новых областей, о которых она прежде и не помышляла.

Риман в первой части своей лекции дал новое, расширенное и обогащенное содержание понятию пространства — он определил его как непрерывную совокупность любых однородных объектов. Такое обобщение привычного образа и было его задачей, когда он решил «сконструировать понятие многократно протяженной величины».

Но учение о пространстве — это и есть геометрия. Так Риман расширил и обогатил содержание самой геометрии.

В двадцатом веке развилась новая наука — топология (это название происходит от слова топос — место). «Топология», если можно так сказать, есть вольный перевод на современный язык известного уже нам analysis situs. Конечно, наука эта теперь неизмеримо содержательней, чем analysis situs во всех его толкованиях, но происхождение свое она, безусловно, ведет от Римана, от его «пробной лекции».

Топология, естественно, изучает топологические свойства фигур — пусть это не прозвучит тавтологией; то есть такие свойства, которые зависят от взаимного расположения и прикосновения их частей и не изменяются при любых непрерывных деформациях — лишь бы они не приводили к разрывам или склеиваниям. Но ни размеры фигур, ни форма их топологию не интересуют, они не существенны для закономерностей, которыми заведует эта наука.

Многообразия таких объектов по аналогии с геометрией называют топологическими пространствами. Математики определяют эти пространства как множества самых различных элементов, «точек», соблюдая лишь одно правило игры: в таком множестве должны быть установлены некоторые отношения, сходные с отношениями, существующими в обычном пространстве. «Точками» могут быть и обыкновенные точки, и линии, и круги, и вовсе не геометрические фигуры, а любая непрерывная совокупность однородных объектов, или явлений, или состояний.

Например — «пространство цветов». Зрение человека трехцветно. Ощущение любого цвета складывается из трех основных ощущений: красного, зеленого и синего цвета. Разная интенсивность, то есть, грубо говоря, количество каждого из них в комбинации и дает всю гамму цветовых ощущений. Любому цвету соответствует одна строго определенная «точка» в пространстве цветов. А линия есть непрерывная последовательность точек. Значит, в этом пространстве «линией» будет непрерывное изменение цвета в данном направлении. Из таких «линий» можно строить фигуры, из поверхностей — тела. Геометрия «пространства цветов» развита полно и логично.

Известны пространства различных состояний — газов и других физических или химических систем. Термин «фазовое пространство» давно и прочно обосновался в науке.

На рубеже нашего и прошлого веков среди математиков ходил такой анекдот:

— В геометрии ничего не изменится, — будто бы любил повторять Гильберт, — если слова «точка», «прямая» и «плоскость» заменить словами «стол», «стул» и «пивная кружка».

Говорил ли он так на самом деле?

Как математик, он вполне мог так сказать. Научная подоплека этого анекдота в том, что геометрия, в широком своем значении, изучает определенные связи между объектами, отвлекаясь от действительных образов самих объектов.

Это не справедливо для той геометрии, с которой мы привыкли иметь дело, но в известном смысле применимо как раз к топологии. И даже в геометрии Лобачевского, которая получается из эвклидовой заменой лишь одного постулата — конечно, со всеми вытекающими отсюда последствиями, странностями и неожиданностями, — даже в гиперболической геометрии «прямая» хотя и не есть «стул», но, как мы знаем, также не есть прямая в нашем обычном представлении.

Теперь мы можем остановиться и немного передохнуть. Трудное восхождение закончено. Вслед за Риманом поднимались мы со ступени на ступень, с каждым шагом достигали большей и большей степени абстракции — Риман недаром задался целью построить то, что он назвал общей концепцией многократно протяженных величин. Чем выше поднимаешься в гору, тем шире становится обозримое пространство. Так и для нас — слушателей Римана — все шире и шире становилось обобщение прежде предельно конкретного и привычного мира, все новые и новые образы наполняли ныне открывшийся нам обогащенный мир.

И самое замечательное, что вся эта, казалось бы, сверхзаумная абстракция, раньше или позже — как мы знаем теперь — находит свое воплощение в реальных образах, реальных явлениях природы, в том, чем ведает физика, или астрономия, или математика.

И мы понимаем, что не только, может быть — не столько логика, сколько удивительная интуиция служила Риману ариадновой нитью.

Курант, один из крупных математиков нынешнего века, сказал:

«Риман — типичное гениальное интуитивное дарование. Вся его внутренняя настроенность и научные интересы вели к тому направлению, которое призвано было стать господствующим в математике. Его интересы распространялись на всю математику, физику, философию и физиологию. Всюду отыскивал он связи между ними. Чисто математические его исследования выполнялись под физическим углом зрения; физико-математические проблемы заставляли его находить тончайшие чисто математические методы и средства».

После этих слов Куранта сам собой напрашивается переход ко второй части лекции Римана — в ней особенно глубока и органична связь чисто математической проблемы с той основной идеей, которая совершила переворот в физике девятнадцатого века.

Но роль интуиции в науке, по-видимому, настолько велика, так интересны и сложны взаимоотношения логики и интуиции в познании мира, что, раз уже зашла об этом речь, задержимся здесь немножко. Ведь, может быть, где-то тут спрятан ключ, которым человек откроет секреты и собственного мышления и других, самых интимных процессов бытия. Вспомним Лобачевского: «гений — это инстинкт».

Конечно, вопрос серьезный и специальный, и он не тема этой книжки. Поэтому, не вдаваясь ни в какие сложности, просто послушаем, что думают на сей счет некоторые ученые.

В столетний юбилей Римана, отмечая роль великого математика в науке, Курант говорил:

— «Строгость» так вошла в плоть и кровь многих, даже выдающихся математиков, что для них была совершенно исключена возможность «нестрогого» и часто полного фантазии подхода. Из возникшей отсюда опасности застоя смогло вывести только то направление, которое исходит от Римана.

А вот еще «один» авторитет — Бурбаки. Это слово взято в кавычки потому, что на самом деле Николя Бурбаки вовсе не «один» — это псевдоним целой группы математиков, главным образом французских. И хотя

Бурбаки «существует» уже тридцать лет, участники группы так себя законспирировали, что до последнего времени никто точно не знал, кто же в нее входит. Но недавно Французская академия наук наградила премией нескольких выдающихся математиков, и тогда-то стало известно, что они и есть основатели группы Бурбаки. Зато труд Бурбаки: многотомный, по замыслу автора — всеобъемлющий обзор-трактат по математике, написанный с позиций современной науки, — этот труд давно уже вызывает глубокий интерес у математиков всего мира.

Бурбаки пишет:

«Математик не работает подобно машине; в рассуждениях математика основную роль играет особая интуиция».

Что же это за «особая интуиция»?

Прежде всего, говорит Бурбаки, она отлична от нашей обыденной интуиции. Но это, так сказать, негативное определение. А позитивное?

Когда ученый долго работает с математическими объектами, пусть самыми отвлеченными, они становятся для него столь же привычными и осязаемыми, как и объекты реального нашего мира. И он тогда в состоянии почувствовать и предугадать, как они себя поведут в тех различных ситуациях, в которые он их поставит; предугадать, что будет нормой их поведения. Вот это «непосредственное угадывание (предшествующее всякому рассуждению) нормального положения вещей» Бурбаки и называет особой интуицией ученого. Роль ее в науках — самых строгих, управляемых, казалось бы, одной только логикой и расчетом, — гораздо больше и значительней, чем многие думают.

«Когда исследователь неожиданно открывает структуру в изученных им явлениях, это для него является как бы толчком, который сразу направляет интуитивный поток его мыслей в неожиданном направлении, и в результате этого математический ландшафт, по которому он движется, получает новое освещение.

...решающие моменты в прогрессе математики — повороты, когда свет гения определял новое направление теории...

...в настоящее время математика менее чем когда-либо сводится к чисто механической игре с изолированными формулами, более чем когда-либо интуиция безраздельно господствует в генезисе открытий...»

Последние слова Бурбаки будто специально посвящены «пробной лекции».

Может быть, у Римана своеобразие интуиции его связано с образом мышления — одновременно и математическим и физическим, с таким, что ли, комплексным восприятием явлений — сразу под двумя углами зрения.

Особенно сказалось это во второй части лекции.

Еще о мирах римановой геометрии

Вторую часть лекции можно назвать — конечно, чисто условно — переходом от качества к количеству. Риман говорит:

— После того, как рассмотрено понятие n-кратно протяженного многообразия... мы перейдем ко второму из поставленных выше вопросов, а именно — к исследованию метрических отношений, возможных на таком многообразии.

Теперь мы знаем, что такое метрика и метрические отношения.

Риман предупреждает слушателей:

— Хотя, чтобы стоять на твердой почве, и нельзя избежать абстрактного исследования с помощью формул, все же результаты этого исследования будут здесь представлены, если можно так выразиться, в геометрическом одеянии.

Итак, Риман начал с того, что с помощью поразительной своей интуиции открыл гигантское множество самых различных пространств — многообразий. Далее, естественно, надо было научиться «жить» в этих многообразиях.

Чтобы жить в любой стране, в любом обществе, необходимо прежде всего знать действующие там законы. И, конечно, следовать им. Римана можно было бы назвать законодателем открытых им стран. Но это будет не совсем точно. Он пришел туда не как завоеватель, навязывающий свои установления. Да и «страна науки», в отличие от стран людей, никогда не позволит навязать ей что-либо чуждое. Он пришел как мудрый и вдумчивый исследователь, раскрывающий то, что было глубоко запрятано.

Прежде всего требовалось установить конституцию — строение пространства. Это значит — найти геометрию, ему присущую, научиться строить в нем фигуры и измерять их, то есть, говоря коротко, установить его метрику.

Риман предлагает общий универсальный принцип: метрические отношения следует искать и фиксировать в бесконечно малой области пространства. Иными словами, пространство надо мерить бесконечно малыми шагами.

Почему предложен именно такой путь?

Потому что для каждого явления природы, принадлежит ли оно «ведомству» математики или физики, в бесконечно малой области действуют более простые законы и в то же время явственно обнажается суть явления, особенности, характерные для данного момента времени и данной точки пространства.

В макропроцессах явление предстоит перед исследователем, так сказать, в интегральной форме, в некоем конечном результате. Но если раздробить его до «клеточного» состояния, зафиксировать в бесконечно малом элементе пространства и времени, то законы его поведения упростятся. Значит, их будет легче обнаружить и сформулировать математически. А потом уже можно их обобщать, распространять на большие области.

Чтобы не впасть в ересь, надо сделать одну оговорку. Когда речь идет о физике, то имеются в виду, так сказать, макроявления. И «дробить» их надо до тех пор, пока изменения будут все еще оставаться количественными. Молекула воды есть все-таки вода... Но в микромире царствуют совсем иные законы. Тут лежит граница, которую преступать нельзя. Тут необходим совсем особый подход, особый метод изучения. О геометрии микромира мы еще поговорим потом.

Вторая генеральная идея Римана — это и есть определение метрики многообразия в бесконечно малой области его.

Как сказал советский геометр Каган, «Риман расщепил пространство на бесконечно малые элементы и показал, как из упрощенной метрики элемента разворачивается метрика всего пространства».

В таком подходе Риман следовал тенденции века, особенно наглядно проявившейся в физике. Эту тенденцию можно назвать поворотом от принципа дальнодействия к принципу близкодействия.

Как развиваются естественные науки?

Сначала идет накопление фактов, экспериментального материала.

Потом факты сопоставляются между собой, ученые ищут связи между ними, закономерности в их поведении.

Когда связи найдены и закономерности постигнуты, приходит черед их обобщению. Так возникают теории и законы.

И наконец, требуется в рамках созданной теории объяснить явления еще необъясненные и предсказать новые, которые из данной теории вытекают.

Конечно, схема эта примитивна, она очень упрощенно излагает сложнейшие процессы познания мира. Но в общих, грубых чертах она верна.

Ее можно проследить в рождении законов Галилея и законов Кеплера, законов Ньютона и одной из вершин классической физики — ньютоновой теории тяготения.

Все эти законы отвечают на вопросы, что происходит и как происходит. Отвечают с достаточной степенью точности и надежности. Во всяком случае, пока дело касается тех явлений, для которых они были созданы.

А ответ на вопрос: «Почему так происходит?» — содержится ли и он в этих законах? И да, и нет. Все зависит от наших требований, от точки зрения, от содержания, которое вкладывается в слово «почему». А говоря по существу, зависит от того, на какой глубине захотим мы искать объяснение явлений, как далеко будем мы докапываться до первопричины вещей.

Например, первый закон Кеплера гласит: каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.

Ньютон объяснил, почему планеты «выбрали» именно эллиптические траектории для своего движения: планеты подчиняются закону всемирного тяготения, а он диктует им именно такие пути.

Объяснение ли это? Да, конечно. Само открытие закона всемирного тяготения стало величайшим достижением науки. В нем не только утверждалась далеко не самоочевидная связь между явлениями, но и впервые в физике причину и следствие разделили, так сказать, территориально, разнесли на огромные подчас расстояния друг от друга.

Если мы кидаем камень или толкаем санки, то у нас и сомнения не возникает, что послужило причиной движения этих «физических тел». Конечно, только Ньютон установил для всех таких процессов строгие количественные законы; но интуитивное понимание связи между причиной и следствием при подобных взаимодействиях было издавна присуще человеку.

Совсем иное дело — взаимодействия между телами, когда они видимо никак не связаны друг с другом. Когда между ними пространство, пустота. Как понять, каким же образом удается Солнцу сквозь пустоту управлять движением Земли, а Земле — падением яблока? Ньютон объяснил и это.

Особенно впечатляющей была всеобщность, универсальность таких взаимодействий — это был действительно закон в с е м и р н о г о тяготения.

Объяснение по видимости «странных» движений планет, объяснение и уточнение законов Кеплера стало настоящим торжеством ньютоновой теории тяготения.

Но было ли это объяснение полностью, до конца удовлетворительным, исчерпывающим всю суть явлений? Тогда, для того уровня науки — было. То поколение ученых оно удовлетворяло. (Исключение, как ни странно, составлял, по-видимому, лишь сам Ньютон.) Но уже в девятнадцатом веке оно представлялось недостаточным. И именно потому, что не раскрывало как раз физическую суть взаимодействия, которое так точно описывало. Оно являло собой, так сказать, эпилог, финал, последний аккорд. А хотелось проследить все действие от начала до конца, чтобы понимать, как и почему оно привело к такому финалу.

Для этого требовался совершенно новый **подход**, иной принципиально. Взаимосвязь явлений надо было рассматривать в последовательно сменяющие друг друга очень малые кусочки, интервалы пространства и времени. Только таким путем возможно было уловить подлинный характер, физическую природу самого взаимодействия.

Этот новый путь и получил в физике название перехода от принципа дальнодействия к принципу близкодействия.

Физика всегда была теснейшим образом связана с математикой, пользовалась ее методами, ее аппаратом. В данном случае она пошла и на заимствование математических терминов.

Принцип близкодействия она назвала дифференциальным, потому что в дифференциальном исчислении рассматриваются взаимодействия за бесконечно малые интервалы — например, времени или пути. А принцип дальнодействия получил имя интегрального, потому что в интегральном исчислении рассматривается суммарный, «интегральный» результат процесса, результат законченный, достаточно большой интервал. Естественно, что только дифференциальное рассмотрение процесса позволяет проникнуть в истинную сущность его.

Эйнштейн так и говорил:

— Дифференциальный закон является единственной формой причинного объяснения, которая может полностью удовлетворить физика.

В девятнадцатом веке, к его середине, умами наиболее выдающихся ученых начинает овладевать мысль, что не только в механике, но и в других областях физики необходим и неизбежен переход к близкодействию. Так в электричестве пионером нового образа мыслей стал Фарадей.

Макс Борн рассказывал, как стиль исследования Фарадея — «испробовать все вообразимое в экспериментальных условиях» — привел его к открытию принципа работы конденсатора:

«Это открытие произвело на Фарадея такое впечатление, что начиная с этого момента, он отказался от идеи обоснования электростатики, исходя из прямого взаимодействия зарядов на расстоянии, и построил новую оригинальную интерпретацию электрических и магнитных явлений — теорию близкодействия».

Фарадей убедился, рассказывает Борн, что заряды на двух металлических пластинах не просто действуют друг на друга через разделяющее их пространство. Существенную роль в их взаимодействии играет как раз природа пространства. Отсюда он сделал вывод, что действие зарядов распространяется от одной точки среды к другой. А сама среда — это не что иное, как электрическое поле, созданное зарядами, сидящими на пластинах конденсатора.

В физике, в частности в теории электричества и электромагнитных явлений, такой подход завоевывал все больше и больше сторонников и в семидесятых годах он завершился теорией Максвелла, этой «истинной теорией близкодействия», по словам того же Борна.

Теория Максвелла уже в чистом, рафинированном виде есть учение о среде, той среде, в которой разыгрываются физические процессы. Более того, именно сама среда становится главным действующим лицом спектаклей, главной пружиной этих процессов. Среда, то есть поле — электрическое, магнитное, электромагнитное, — возникающее всякий раз, когда на сцену выступает какой-нибудь процесс, связанный с электричеством, или магнетизмом, или светом.

Принцип близкодействия оказался на редкость плодотворным. С его помощью удавалось решать самые различные задачи.

Ход решения был универсальный. Сначала физик находил точную формулировку дифференциального закона — закона, который описывал данное явление в бесконечно малой области. Потом, по рецептам высшей математики, он «интегрировал» найденный закон, распространял его на конечную, макроскопическую область. Полученный таким образом результат, с одной стороны, можно было уже проверить в эксперименте, а с другой — он отражал не внешние, а внутренние свойства физического процесса.

Так, закон Ома, полученный из измерений на куске проволоки, фактически есть следствие дифференциального закона, справедливого для микропроцесса — для движения электронов в бесконечно малом отрезке проволоки.

Подобные же микрозаконы действуют и для процесса распространения света и других электромагнитных волн, и для теории тяготения...

Об этом новом подходе, что стал зарождаться в физике с середины девятнадцатого века, не мог не думать и Риман.

В 1850 году он как член педагогического семинара написал статью «О начале, порядке и методе естественного образования в гимназии». В ней сказано: «Так, например, можно представить себе полную, замкнутую в себе математическую теорию, которая от элементарных законов, действующих для одной точки, переходит к процессам в окружающем нас реальном пространстве, вне зависимости от того, касается ли это силы тяжести, или электричества, или магнетизма, или теплового равновесия».

Вернемся к закону всемирного тяготения, хотя он, казалось бы, к геометрическим идеям Римана отношения не имеет. Вернемся к нему и вспомним те спорящие друг с другом слова, которые о нем были сказаны.

Он — одна из вершин классической физики.

Он — типичный, классический (повторим это слово, здесь оно как нельзя более уместно) закон дальнодействия. Но ведь девятнадцатый век, век расцвета классической физики, уже всерьез усомнился в познавательных возможностях принципа дальнодействия. И предложил ему в преемники новый подход для изучения и описания физических процессов.

И, наконец, было замечено в скобках, что не все в этом законе удовлетворяло самого Ньютона.

Что «не все»?

Как раз неизбежное в этой теории дальнодействие — мгновенное действие сил тяготения через большие расстояния.

Бесспорно, и интересней и лучше всего здесь послушать Эйнштейна, который не только относился с величайшим уважением к Ньютону, но и понимал его так, как гений понимает гения.

Эйнштейн писал:

«Ньютон знал слабости построенной им системы лучше, чем последующие поколения ученых. Это обстоятельство всегда вызывало во мне чувство почтительного удивления...

Ньютон понимал, что его законы могут иметь смысл только, если пространство обладает физической реальностью в той же мере, как материальные точки и расстояния между ними.

Ясное понимание им этого обстоятельства выявляет как мудрость Ньютона, так и слабую сторону его теории.

Введение мгновенно действующих на расстоянии сил для представления гравитационных эффектов не соответствует характеру большинства явлений, известных нам из повседневного опыта. Ньютон предупреждает эти возражения, указывая, что на его закон следует смотреть не как на окончательное объяснение, а как на выведенное из опыта правило».

Слова эти должны разрешить наше недоумение, расставить все по своим местам. Хотелось бы только добавить к этому, что Ньютон уже в семнадцатом веке осознал необходимость применять именно дифференциальные законы или принцип близкодействия для описания физических процессов. Так, например, его закон движения, знаменитый «второй закон Ньютона», описывает, как изменяется движение материальной точки под действием внешней силы за бесконечно малое время. И только из этого дифференциального закона Ньютон потом получает итоговый, конечный результат ускорения тела под действием силы.

Оказывается, коллизия эта — Ньютон и закон всемирного тяготения — чрезвычайно занимала и Римана.

Летом 1857 года во время путешествия со своим тогдашним учеником Дедекиндом по Гарцу Риман возил с собой книгу Бревстера «Жизнь Ньютона». Однажды, как вспоминал Дедекинд, Риман долго и с удивлением рассказывал ему об одном письме Ньютона. В письме этом автор теории всемирного тяготения сам говорит, что дальнодействие невозможно.

Потом, в своих философских фрагментах, Риман снова возвращается к теории тяготения Ньютона, к этому письму. Он приводит отрывок из письма:

«Мысль о том, ...чтобы одно тело могло воздействовать на другое через пустоту на расстоянии, без участия чего-то такого, что переносило бы действие и силу от одного к другому, — представляется мне столь нелепой, что нет, как я полагаю, человека, способного мыслить философски, кому она пришла бы в голову».

Ньютон предугадывал, что непременно должно быть «участие чего-то такого», какой-то неизвестной ему субстанции, которая передавала бы действие одного тела на другое.

Предугадывал... Но назвать такую субстанцию не мог. Науке предстоял еще долгий путь, чтобы приблизиться к ответу.

Точно назвал эту субстанцию и нашел окончательное разрешение загадки всемирного тяготения, как мы знаем, лишь Эйнштейн — в общей теории относительности.

Но уже и Риман был убежден, что для всех явлений природы, в том числе и для тяготения, взаимодействие на больших расстояниях должно быть следствием микровзаимодействий, то есть процессов, протекающих в соседних бесконечно малых элементах пространства. И что именно об этом и думал Ньютон. Вот почему Риман с грустью заметил, что «закон всемирного тяготения — вопреки ожиданиям его творца — так долго не допускал более глубокого объяснения».

«Перекличка» между Эйнштейном и Риманом по поводу Ньютона и его теории тяготения сделана не случайно. И не только потому, что оба ученых подтверждают свою приверженность принципу близкодействия. Была здесь и задняя мысль...

Известно, какую роль в эйнштейновской теории относительности сыграли идеи Римана и построенный на их основе математический аппарат. Хочется думать, что это не прихоть случая, что в основе кроется какая-то общность в мышлении обоих ученых, в их подходе к науке.

Бесспорно, что духовная близость может связывать людей разных поколений, даже разных эпох. И заметно проявляться в их творчестве — коль скоро речь идет об искусстве, литературе, общественной деятельности.

А в науке? Такой, как физика, математика?

Здесь это уже совсем не бесспорно, поскольку принято считать, что в таких науках личность исследователя не сопрягается с существом его труда. Или уж, во всяком случае, влияет на процесс, но никак не на результаты — объективные, отражающие закономерности природы, а не свойства ума и характера ученого.

Конечно, в своей работе исследователь использует необходимые результаты и опыт своих предшественников — но просто как данность, часто не ведая, даже не задумываясь, не интересуясь, каким путем эти результаты достигнуты. Личность одного ученого может быть совершенно безразлична другому — к делу она не имеет никакого отношения. Последняя истина кажется более чем бесспорной, она воспринимается как банальность. Но не потому ли, что мы думаем о физике и математике вообще, о точных результатах и законах, воплощенных в формулы и цифры?

А если вспомнить об открытиях, ставших поворотными пунктами в истории науки, совершивших переломы в человеческом мышлении и взгляде на окружающий мир, — так ли уж они свободны от личности своих творцов? Та же теория относительности, например?

Конечно, вопрос этот и вообще и в данном случае сложен до крайности. На него не легко ответить, но и не думать о нем, по-видимому, тоже нельзя.

Однако пришло уже время возвратиться к геометрическим идеям Римана, к его «пробной лекции». Но отступление наше не было напрасным. Не было потому, что принцип близкодействия в физике сходен с измерением пространства бесконечно малыми шагами в геометрии.

Чтобы легче усвоить идеи Римана, снова пойдем от простого к сложному. Начнем с теоремы Пифагора, причем в ее обычном, «макроскопическом» варианте.

Возьмем отрезок прямой и поместим его в прямоугольную систему координат. Как найти его длину? Элементарно просто — это мы проделывали в школе. Спроектируем концы отрезка на обе оси координат. Тогда длина отрезка будет равна корню квадратному из суммы квадратов обеих проекций.

Почему? По формуле Пифагора. Ведь отрезок — это гипотенуза, а его проекции — катеты.

Сопоставляя свое построение с написанной формулой, мы видим, что длина отрезка обозначается не только числом, но и неким математическим выражением — назовем его квадратичной формой. Очевидно, имя выбрано удачно, так как главная, определяющая часть нашего выражения есть сумма квадратов.

С помощью такой квадратичной формы мы можем производить измерения расстояний на плоскости. Значит, мы получили закон измерения, а следовательно, и характеристику внутренних свойств, метрику одного геометрического объекта — плоскости.

Наученные Риманом, мы теперь знаем, что закон этот можно обобщить. Заменяя две оси, а значит и две проекции, два, так сказать, «катета» тремя, получим квадратичную форму для отрезка, находящегося в трехмерном пространстве. И дальше, обобщая подобным же образом, найдем квадратичную форму для «плоских» пространств n измерений.

Но как плоскость есть частный случай двумерного многообразия — поверхности с какой угодно, постоянной или меняющейся, кривизной, так и любое n-мерное «плоское» пространство есть частный случай n-мерного многообразия с произвольной, тоже либо постоянной, либо переменной кривизной. И задача состоит в том, чтобы найти метрику такого «пространства» многих измерений, дать общий принцип, рецепт измерения в нем расстояний.

Риман его дал. Вот тут-то ему и понадобился переход к «геометрии близкодействия».

Риман показал, что в бесконечно малой области любого пространства элемент длины — аналог отрезка прямой, то есть нашей гипотенузы — можно тоже определять с помощью квадратичной формы. Значит, квадратичная форма есть также аналог, обобщение теоремы Пифагора.

Таким образом, как и в физике, основной, неизменно оправдывающийся на опыте закон эвклидовой геометрии дальнодействия — теорема Пифагора — есть интегральное, справедливое для нашего мира выражение глубокой микрозакономерности. Вот ее суть: если точки бесконечно близки друг к другу, то есть длина отрезка бесконечно мала, то квадратичная форма будет точно описывать любое геометрическое пространство, какой угодно кривизны и числа измерений.

Вот почему мы говорим, что Риман, совершая переход от эвклидовой геометрии к «геометрии близкодействия», следовал тенденции своего века — понять и объяснить мир, раскрывая явление в бесконечно малом.

Гаусс определял квадратичной формой расстояния в бесконечно малой области поверхности. Риман предложил распространить этот принцип на многообразия любого характера и любого числа измерений.

Свои особенности, свой, вообще говоря, неповторимый характер каждое пространство запечатлевает в коэффициентах, в неких величинах, входящих в квадратичную форму. Потому-то эта форма, которую недаром называют основной формой пространства, полностью определяет его геометрию, его метрику — и не только в малом, но и на макрорасстояниях.

Этому не надо удивляться, ведь здесь существует глубокая и однозначная связь:

основная форма определяется коэффициентами, которые присущи только данному пространству — и никакому другому — и возникли из его строения, из его внутренних особенностей;

в свою очередь, основная форма определяет строение и внутренние особенности именно «своего» пространства — и в малом и в большом.

Не побоявшись вольного сравнения, можно сказать, что основная форма — это эмбрион геометрии данного пространства. Поэтому естественно, что при умелом обращении из зародыша развивается вся геометрия пространства в целом.

Основная форма может быть сколь угодно многообразной — несть числа значениям, которые могут принимать входящие в нее коэффициенты. Значит, сколь угодно многообразны могут быть и пространства. Они могут разниться, как уже говорилось, и числом измерений и кривизной. Значит, и геометрии их должны быть совершенно различны, не схожи друг с другом.

Но все они, построенные по одному принципу, развивающиеся из «зародыша» основной формы, из квадратичной формы для элемента длины в бесконечно малом, стали называться римановыми геометриями.

Риманова геометрия и геометрия Римана

Обширен, прямо-таки необъятен род римановых геометрий (поэтому часто всю их совокупность просто называют римановой геометрией, или римановой геометрией в широком смысле слова). Но в мире всегда и повсюду действуют свои «законы сохранения» — выигрыш в одном сопровождается проигрышем в другом.

Выиграв в широте охвата, в общности подхода, Риман проиграл в содержании — им даны основные идеи, но детальной разработки их нет. Развитие этих идей стало делом следующих поколений ученых.

Обратное было у Лобачевского. Посвятив себя одной, первой из известных человечеству неэвклидовых геометрий, той, которую он открыл (о возможности существования других он и не подозревал), Лобачевский оставил нам глубокую и детальную разработку ее.

В своей лекции Риман с высот обобщения тоже решил «спуститься» к некоторым конкретным геометриям — наиболее простым, хотя, как мы знаем на примере геометрии Лобачевского, простота их весьма и весьма относительна.

Самый простой случай — когда кривизна всюду равна нулю. В одном измерении — это прямая линия, в двух — плоскость, в трех — эвклидово пространство; все хорошо знакомые нам объекты. Кривизна равна нулю и для любого n-мерного «плоского» пространства.

Но кривизна может быть отлична от нуля, хотя и постоянна. Это следует из геометрии Лобачевского, которая есть геометрия не только поверхности, но и пространства постоянной отрицательной кривизны.

А Риман? Что нового вносит он?

Риман дает более общее определение:

— Многообразия, для которых мера кривизны равна нулю, — говорит он, — представляют частный случай многообразий, для которых мера кривизны всюду постоянна.

Это утверждение на первый взгляд кажется самоочевидным. Действительно, нулевая величина есть частный случай величины постоянной. Кто в этом сомневается?

Но не надо забывать, что речь ведь идет не только о математических абстракциях, что место отвлеченных образов может вдруг занять реальное пространство. А вопрос о его кривизне уже далеко не тривиальный. Даже сейчас, во второй половине двадцатого века. И вспомните еще, с каким непониманием, даже издевательствами столкнулся Лобачевский, когда он заговорил о возможности неэвклидова пространства.

Итак, постоянная кривизна пространства. Раз постоянная, то она, естественно, может быть или нулевой, или повсюду одинаково отрицательной, или одинаково положительной.

С первыми двумя мы уже более или менее освоились. Их авторы — Эвклид и Лобачевский.

Третья, постоянная положительная кривизна — полная собственность Римана. Поэтому геометрия пространства с такой кривизной называется геометрией Римана.

А могло бы сложиться иначе. Вспомним, как Саккери без колебаний отбросил «гипотезу тупого угла». Окажись он не столь расточительным, ростки геометрии положительной кривизны могли бы появиться на свет двумя веками раньше.

Саккери был глубоким и тонким математиком. Поэтому, чем упрекать его, лучше разберемся в причине такого решения.

Саккери, как мы знаем, применил в своей работе метод, который называется доказательством от противного, или приведением к абсурду.

«Гипотезу острого угла» — из нее потом выросла гиперболическая геометрия Лобачевского — никак не удавалось привести в противоречие с абсолютной геометрией; то есть с той частью эвклидовой геометрии, куда входило все, исключая пятый постулат и следствия из него. «Но я не хочу, — написал Саккери, — отказаться от попытки доказать, что эта упрямая гипотеза острого угла, которую я уже вырвал с корнем, противоречит самой себе».

Это примечание, чересчур эмоциональное для математического трактата, — свидетельство долгих, мучительных и безуспешных попыток Саккери привести к абсурду «упрямую гипотезу». Предположение о том, что сумма углов треугольника меньше двух прямых, или, что то же самое, замена пятого постулата исключающим его законом, оказались совместимы с остальными постулатами Эвклида. Саккери здесь был бессилен...

Что же касается «гипотезы тупого угла», то Саккери без затруднения доказал, что она противоречит не только пятому постулату, но и другим основам геометрии Эвклида. Таким образом, ложность этой гипотезы не вызвала у него никаких сомнений.

Нам нет надобности повторять путь Саккери. Достаточно «столкнуть» основные принципы геометрий Римана и Эвклида, и будет ясно, в чем дело.

Геометрия Эвклида строится на представлении о бесконечной протяженности ее прямых. Об этом говорит второй постулат:

«Нужно потребовать, чтобы ограниченную прямую можно было непрерывно продолжать по прямой».

Иными словами — продолжать как угодно далеко.

А раз можно бесконечно далеко продолжать прямые линии, то так же бесконечно могут продолжаться и плоскости. Значит, и само пространство должно быть бесконечно протяженным во всех своих направлениях.

Убежденность в бесконечности пространства была полной и абсолютной у всех, кто задумывался над сущностью пространства, в том числе и у крупнейших ученых — физиков, математиков, философов. И в девятнадцатом веке, и в предшествующих.

И вот этот-то, казалось, незыблемо устойчивый камень в фундаменте не только эвклидовой геометрии, но и общего строения мира выбивает геометрия Римана.

Попробуем представить себе пространство положительной кривизны. В известном смысле это как будто бы легче, чем представить пространство Лобачевского, обладающее отрицательной кривизной. Легче просто потому, что с постоянной положительной кривизной мы сталкиваемся всю жизнь — правда, с кривизной поверхностей, а не пространства. Любые шары, огромные или маленькие, это есть поверхности постоянной положительной кривизны. А поверхности постоянной отрицательной кривизны — псевдосферические поверхности — нам мало знакомы, мало привычны.

Однако, если говорить по-честному, близкое знакомство с шарами нас мало спасает. Сферическое пространство вообразить себе очень трудно, сверхтрудно. Хотя будем все-таки думать, что это хоть капельку легче, чем представить пространство Лобачевского.

Мы рождаемся в эвклидовом мире — трехмерном пространстве нулевой кривизны. Этот мир такой, какой он есть, входит в наше представление, можно сказать, с молоком матери, и уж во всяком случае — со школьной скамьи. Вся наша жизнь — сознательная и бессознательная, наша деятельность протекают в этом мире.

Хорош он или плох, нам привычно существовать в нем. Другого мы не знаем, и ощутить его нам не дано.

Мы отлично видим, что в нашем пространстве обитают различные тела и фигуры, например — плоскости и шары. Разницу между ними мы чувствуем и интуитивно, и можем ее вполне убедительно описать и объяснить. Все потому, что эти объекты мы наблюдаем, так сказать, со стороны. Со стороны нам видно, что плоскость — плоская, а шар — шарообразен.

Мы живем на Земле, похожей на шар. Или улетаем ввысь с ее поверхности. Или погружаемся в глубины ее недр и океанов. Такие путешествия нам доступны. Мы трехмерны сами и живем в трехмерном пространстве. Его геометрия, его законы есть наша геометрия и наши законы. И наши представления о нем соответствуют действительной сути его. Во всяком случае, с той точностью, с какой доступна нам их экспериментальная проверка. А вот пусть кто-нибудь из нас превратится в некое двумерное существо. И пусть это существо поселится на поверхности шара. И пусть кривизна его будет такая же, как и у шара. Существо будет ползать по шару, будет его изучать. Оно даже сможет построить его геометрию — строгую, логичную, основанную на собственных аксиомах.

Но оно не сможет прийти ни к какому заключению ни о его, а следовательно, и ни о своей кривизне. Если только мы, жители трехмерного пространства, не подскажем ему. Нам-то великолепно видно, что обиталище двумерного существа — сфера, поверхность постоянной положительной кривизны, и никакого труда для нас не составит определить радиус ее кривизны.

Но нам самим помощи ждать неоткуда. Не существует в природе такого четырехмерного пространства, откуда можно также со стороны взглянуть на наш трехмерный мир и сказать, какова она на самом деле, его кривизна. А мы сами не можем представить себе изогнутое, искривленное пространство, окажись оно даже знакомой нам сферической формы.

Значит, и в этом «более легком» случае нам должна помочь не «обыденная интуиция», как назвал ее Бурбаки, а «особая интуиция ученого». Но если первая нам помочь не может, а второй мы просто не обладаем, не пришлось ее приобрести, то ничего не остается, как снова обратиться за помощью к «двумерному случаю», не к сферическому пространству, а к поверхности сферы.

На сфере мы сможем увидеть некоторые из основных особенностей геометрии Римана. А дальше по его схеме, по его методике останется логически перенести эти закономерности на большее число измерений — и в первую очередь на трехмерное пространство.

Тогда обретет доказательность пока что повисшее в воздухе утверждение — что геометрия Римана противоречит не только геометрии Эвклида, но и общепринятым представлениям о строении нашего мира.

Возьмем в руки глобус.

Прежде всего забудем, что Земля не есть геометрически правильный шар. И что поверхность ее, к тому же, разрезана реками, «покорежена» горами и впадинами. Короче, отвлечемся от физической географии нашей планеты, то есть не будем обращать внимания на раскраску глобуса. Координатную сетку — меридианы и параллели — мы оставим, она нам понадобится.

Итак, у нас в руках шар. Подумаем о его геометрии.

Одно из первых и главных понятий эвклидовой геометрии — понятие прямой линии. Но если понимать прямую как линию нулевой кривизны, то на сфере прямых линий нет; любая изогнута, любая имеет кривизну. Как тут быть? Чем заменить эвклидову прямую?

Тут нас выручает другое определение прямой: прямая есть кратчайшее расстояние между двумя точками.

Еще греческим геометрам было известно, что на сфере кратчайшее расстояние между двумя точками есть часть дуги большого круга, то есть той окружности, диаметр которой равен диаметру самой сферы.

Значит, все меридианы — «заменители» прямых на сфере. И экватор тоже. А вот параллели определению прямых уже не удовлетворяют: длина их дуг больше кратчайшего расстояния между двумя точками, то есть между концами этих же дуг. Поэтому параллели нас перестали интересовать. Не будем больше ими заниматься и обратимся к вновь обретенным «прямым». К дугам больших кругов.

— Я земной шар чуть не весь обошел, — сказал Маяковский.

А мы обойдем его весь. На глобусе.

Возьмем палочку и «обойдем кругом» земной шар — по экватору или по меридиану. В конце концов мы вернемся в ту же точку, из которой начали путь.

Могло ли быть такое в эвклидовом пространстве или на эвклидовой плоскости?

Никогда!

Пустившись в путь по прямой, мы шли бы и шли — до бесконечности.

Говорят, все постигается в сравнении. В том числе и различия. Мы сейчас почувствовали, чем отличаются прямые на плоскости от прямых на сферической поверхности.

Но законы двукратно протяженного многообразия, а попросту говоря, поверхности — сферической в нашем случае — должны, по Риману, распространяться на многообразия трех и большего числа измерений. Иными словами, замкнутость «прямых» должна иметь место и в сферическом пространстве.

Остается поставить все точки над «и». Итак, сферическое пространство или пространство постоянной положительной кривизны замкнуто и конечно, как замкнут и конечен шар — сферическая поверхность. Таким же свойством обладает, естественно, и другое пространство положительной кривизны — эллиптическое. (Как окружность есть частный и предельный случай эллипса, так и шар есть частный и предельный случай эллипсоида. Поэтому эллиптическая поверхность, а равно и эллиптическое пространство есть обобщение поверхности и пространства сферических).

Так замкнутость и конечность пространства Римана нанесли удар по укоренившимся представлениям о бесконечности пространства.

Проблема конечности и бесконечности реального физического пространства, или, шире, проблема его строения, его структуры — и посейчас одна из самых сложных и интересных в науке. И у нас будет еще много поводов возвратиться к ней.

А пока продолжим знакомство с геометрией Римана.

Мы теперь знаем, что́ есть «прямые» в этой геометрии. И естественно сразу же заинтересоваться их параллельностью. Ведь, не говоря о прочем, именно казус с параллельными оказался чем-то вроде троянского коня или — по современной терминологии — пятой колонны в царстве Эвклида. Именно благодаря туманному поведению параллельных было разрушено представление о незыблемости эвклидова мира. И рядом с ним возник тогда новый, более широкий мир геометрии Лобачевского.

Одним из краеугольных камней этой геометрии стал свой, отличный от эвклидова, постулат о параллельных. Мы его знаем, вот он: через каждую точку можно провести две прямые, параллельные данной прямой.

А сколько параллельных разрешается иметь прямой в геометрии Римана?

Опять смотрим на глобус и выбираем на нем любой из больших кругов — римановых «прямых» — экватор, меридиан. Или такую же окружность, но без географического названия. А теперь поищем другую прямую, ей параллельную.

Искать можно бесконечно долго, с одним и тем же успехом. Параллельных в геометрии Римана нет. Нет вовсе. Любые две ее «прямые», любые два больших круга обязательно пересекутся, да еще и дважды в двух точках. (И пусть нас тут не путает географический термин «параллель». Географические параллели действительно нигде не пересекаются друг с другом. Но беда в том, что они, как уже отмечалось, не есть прямые геометрии Римана. Просто не могут быть ими — потому что дуги их не есть кратчайшее расстояние между двумя точками. Один и тот же термин в разных науках может обозначать совершенно различные, иногда имеющие лишь чисто внешнее сходство, понятия. И не надо терминологии давать вводить себя в заблуждение).

Итак, если будет всего одна прямая, параллельная данной прямой, значит, дело происходит в плоскости Эвклида. Две прямые, параллельные данной, живут в плоскости Лобачевского. А в плоскости Римана нет ни одной прямой, параллельной данной.

Напомним только, что если в геометрии Эвклида понятия «параллельные прямые» и «непересекающиеся прямые» тождественны, то в геометрии Лобачевского они имеют разный смысл. Прямых, проходящих через данную точку и не пересекающихся с данной прямой, у Лобачевского бесконечное множество. Из них две предельные прямые, лежащие на границе между пересекающимися и непересекающимися, первые из не пересекающих исходную прямую, он называет параллельными.

Учитывая это замечание, может быть, лучше сказать, что в эвклидовой геометрии через каждую точку проходит лишь одна прямая, не пересекающаяся с данной, в геометрии Лобачевского их бесконечное множество, а в геометрии Римана нет ни одной.

Тогда сразу становится понятным промежуточное положение геометрии Эвклида между двумя новыми геометриями. Старый, привычный, тысячелетиями знакомый человечеству мир Эвклида оказался посередке между открытыми лишь в девятнадцатом веке новыми, весьма экстравагантными по своей структуре и законам мирами. Лишь очень немногие, те, кто обладал достаточной смелостью мышления, нашли в себе силы уже в том, в девятнадцатом веке, понять и принять эти миры.

Сейчас это гораздо легче сделать. Во-первых, стало шире и смелее коллективное мышление человечества, во всяком случае, в науке. А во-вторых, самые, казалось бы, невероятные вещи, когда они научно доказаны и освящены авторитетами, воспринимаются все-таки спокойнее, без активного внутреннего сопротивления. И даже ум, очень далекий от этих конфликтующих с привычным миром абстракций, не тренированный в этом смысле, не изощренный, ныне пытается в них разобраться; не оттолкнуть их хочет, а принять, включить в круг своих интересов.

В эвклидовой геометрии, как мы знаем, с постулатом о параллельных теснейшим образом связана теорема о сумме углов треугольника. Или, точнее, эта теорема может послужить эквивалентом пятому постулату, занять его место; и тогда сам пятый постулат, уступив свое место, становится обыкновенной, легко доказываемой теоремой. Все это нам известно.

У Лобачевского эквивалентом его постулата о параллельных служит утверждение о том, что сумма углов треугольника меньше, чем в эвклидовой геометрии, то есть меньше двух прямых углов.

У Римана, естественно, величина этой суммы должна отличаться и от одного и от другого значений. В его геометрии такой вывод следует из его, риманова, постулата о параллельных.

Но даже отвлекаясь от исследования параллельных во всех трех геометриях, после всего сказанного нетрудно догадаться, какой будет сумма углов треугольника в геометрии Римана. Если у Лобачевского она меньше двух прямых углов, у «промежуточного» Эвклида равна двум прямым, то у Римана, несомненно, должна быть больше двух прямых.

Последний случай и есть та самая «гипотеза тупого угла», с которой сравнительно легко расправился Саккери. Почему так получилось, мы теперь знаем. «Гипотеза тупого угла» противоречила не только «сомнительному» пятому постулату, но и другим основам геометрии Эвклида, и прежде всего «совершенно надежному» второму постулату, утверждавшему бесконечность прямой линии.

Не будем больше вникать в законы геометрии Римана. В ней, конечно же, как и в геометрии Лобачевского, масса странного и непривычного для нашего эвклидова мышления, масса «курьезов». Вот, к примеру, один: среди всех треугольников, сумма которых всегда больше двух прямых, возможен и такой, у которого все три угла прямые — случай нам прежде неизвестный. В этой геометрии, так же как в геометрии Лобачевского, не может быть подобия; фигуры подобны только если они равны.

Расставаясь с геометрией Римана, откроем напоследок еще одно ее имя — «эллиптическая». Напомним, что геометрию Лобачевского называют также и «гиперболической».

Геометрию Эвклида в таком случае логично было бы назвать «параболической», так как парабола есть промежуточное между эллипсом и гиперболой коническое сечение. Такое название действительно было бы верным и справедливым, но оно в науке не привилось; за эвклидовой геометрией осталось ее узаконенное историей имя.

Размышления о пространстве

Подведем некоторые итоги.

Риман открыл, или создал, — оба слова тут равно применимы — огромный, ранее неизвестный человечеству мир математических пространств, по его терминологии — многократно протяженных многообразий, причем каждое из них, естественно, должно обладать своей собственной геометрией.

Из всего этого множества Риман выделил простейшие многообразия — с постоянной кривизной. Таких, как мы помним, для каждого числа измерений должно быть три: нулевой, постоянной отрицательной и постоянной положительной кривизны. Если взять теперь самый интересный для нас случай трех измерений, то первому из названных соответствует эвклидово пространство с его геометрией, второму — гиперболическое пространство Лобачевского, а третьему — эллиптическое пространство Римана.

Рождение всех многоликих римановых пространств, в том числе и одного из простейших — эллиптического пространства, было актом чисто математического творчества. Все они были построены, сконструированы, говоря словами Римана, по законам математики и логики. Замысел ученого успешно осуществился. Кажется, тут бы и поставить точку. Но нет, такой подход не в характере мировоззрения Римана.

Поэтому представляется вполне естественным и закономерным, что Риман заключительную часть своего труда посвящает размышлениям об истинной структуре, а значит, об истинной геометрии реального физического пространства. Разве можно было не задуматься над этим вопросом тому, кто открыл новые пространства, хотя бы и на «кончике пера»?

Мы помним, вопрос этот тревожил Гаусса. Он, забыв на время о порученной ему королем Ганновера топографической съемке, направил свои угломерные приборы на вершины трех гор, Хохер Хаген, Брокен и Инзельсберг, и измерил сумму углов этого, как ему казалось, достаточно большого треугольника. Измерял с наивысшей доступной ему точностью и с превеликой тщательностью... Вот только одного мы не знаем, с какими чувствами, с какой надеждой.

Помните, каким непростым было отношение Гаусса к неэвклидовой геометрии? То он принимал ее, то отвергал, то веровал, то сомневался.

В письме Тауринусу, рассматривая свойства мира постоянной отрицательной кривизны, он говорил: «Единственное, что в этой системе противится нашему разуму, это то, что в пространстве, если бы эта система была справедлива, должна была бы существовать некоторая сама по себе определенная (хотя нам и неизвестная) линейная величина».

И тут же: «Я... иногда в шутку высказывал желание, чтобы эвклидова геометрия не была истинной, потому что мы тогда имели бы a priori абсолютную меру длины».

Мы-то знаем, что проблема эта совсем не в шутку занимала Гаусса. Но вне зависимости от своего желания, от своей, осознанной или неосознанной, приверженности к одной или другой геометрии, измерения проводил он, конечно, с высшей беспристрастностью и объективностью ученого.

Никакого отклонения суммы углов от 180° Гаусс не обнаружил и обнаружить не мог. Даже если оставить в стороне несовершенство приборов, измеряемые им расстояния были чрезмерно малы для такой задачи.

Это отлично понимал Лобачевский, который, естественно, тоже не единожды задумывался о геометрии реального мира.

Лобачевский выбрал для своих измерений другой треугольник — «чуть побольше». Одна вершина его находилась на Земле, другая — на Солнце, а третья — на «неподвижной» звезде Сириусе. Солнце отстоит от Земли на 150 миллионов километров, а Сириус еще в миллион раз дальше. Вот какой величины треугольник измерял Лобачевский. Расчеты он проводил, пользуясь так называемыми параллаксами звезд, по которым определяется расстояние до звезды.

Но точность угломерных приборов была по-прежнему мала; значения параллаксов — тоже не очень точны и, кроме того, найдены на основе эвклидовой геометрии. Правда, последнее обстоятельство Лобачевский постарался учесть.

Не приходится удивляться, что отклонение суммы углов такого треугольника от двух прямых лежало глубоко в пределах ошибки измерений. Поэтому опыт Лобачевского не мог дать ответа на вопрос, не мог решить в пользу какой-либо из геометрий.

Обескуражил ли такой результат Лобачевского, поколебал ли его убеждения? Нет, тем более, что он понимал — не только несовершенство приборов и измерений было причиной отрицательного результата. Главное — еще недостаточно велик был и сам его «астрономический треугольник».

Лобачевский писал: «Нельзя не увлекаться мнением Лапласа, что видимые нами звезды принадлежат к одному только собранию небесных светил, подобно тем, которые усматриваем как слабо мерцающие пятна в созвездиях Ориона, Андромеды, Козерога и др. Итак, не говоря о том, что в воображении пространство может быть продолжено неограниченно, сама природа указывает нам такие расстояния, в сравнении с которыми исчезают за малостью даже и расстояния нашей Земли до неподвижных звезд».

Только нынешняя стадия движения науки показала, насколько сложен вопрос об истинной геометрии нашего пространства. Но об этом — в конце книги.

Риман никаких измерений для «выбора» истинной геометрии пространства не предпринимал. Он ограничился некоторыми общими рассуждениями. Во всяком случае, одно он понимал совершенно: окончательное решение, окончательный приговор вынесет не математика, а физика с астрономией, и лишь тогда, когда будет накоплен достаточный опытный материал и гораздо выше поднимется уровень знаний.

— Здесь мы стоим на пороге области, принадлежащей другой науке — физике, — сказал Риман, — и перешагнуть его не дает нам повода сегодняшний день.

Что же положительного о геометрии пространства мог сказать Риман, находясь в своем «сегодняшнем дне»? Хотя, по существу, осознавал он это или нет, его собственное «сегодня» для науки было уже «завтра».

Прежде всего Риман, вероятно, раньше других ученых понял — во всяком случае, сказал вслух — что понятия «безграничность» и «бесконечность», если речь идет о пространстве, не только не одно и то же — в них нет ничего общего.

«Неограниченный» по смыслу слова означает: не имеющий границ. Вдумаемся в содержание этих слов.

Мы сидим на трибуне катка и смотрим. Конькобежец делает один круг за другим. Никуда в бесконечность он не убегает — он все время перед нашими глазами. Но в то же время путь его безграничен, он ни разу не вышел из круга, не пересек границы.

Но вот ему, видимо, надоело так кататься или он просто замерз. Он сошел с круга, побежал по прямой, пересек круг в другом месте и скрылся в раздевалке.

Посмотрим на его действия не как простые болельщики, а как геометры. Первый раз конькобежец пересек границу, когда сошел с окружности. При этом он попал в положение «внутри» круга. Затем он снова пересек границу и очутился уже «вне» круга.

Вспомним, к каким отношениям в геометрии принадлежит взятые в кавычки слова. Они принадлежат отношениям протяженности, то есть топологии. Значит, свойство безграничности (а также любые нарушения границы, переходы через нее) также принадлежит топологии.

А бесконечность?

Улетает с Земли космический снаряд. Сначала с ним поддерживается связь. В вычислительном центре подсчитывают, что он пролетел уже столько-то тысяч километров, потом столько-то миллионов... А снаряд, устояв против притяжения Солнца, а затем и других звезд, летит все дальше и дальше. Сменяются световые года, а снаряд летит, летит, и нет конца его полету. И кажется, что нет уже меры длине его пути. А он летит, летит... Вот что такое бесконечность, если мысленно, образно представить ее себе.

Бесконечность — то, что простирается как угодно далеко. Это расстояние, которое хотя и измеряемо, но — даже в принципе — не может быть измерено до конца, потому что конца просто нет.

Теперь нам станут понятны слова Римана:

— При рассмотрении пространственных построений в направлении неизмеримо большого, — сказал он, имея, по-видимому, в виду расстояния, гигантски большие по сравнению с земными, — следует различать свойства неограниченности и бесконечности — первое из них есть свойство протяженности, второе — метрическое свойство.

В этом открытии Римана самое важное не математические различия, не то, что первое понятие принадлежит топологии, а второе — метрике, измерениям, хотя, вероятно, Риман именно таким, чисто математическим путем пришел к пониманию этого различия. Важен физический и, может, еще больше философский смысл открытия. Тем более, что сами философы, по крайней мере некоторые из них, долго не могли это различие постичь и смириться с ним.

Философы эти были убеждены, что бесконечность и безграничность — синонимы. Что их наполняет одно и то же содержание, как физическое, так и философское. И, значит, они взаимозаменяемы, как штампованные детали. Путаницу в умах такое представление вызвало необычайную.

Так, общая теория относительности особенно яростным нападкам подвергалась как раз за то, что из ее уравнений делали вывод о конечном объеме пространства Вселенной. «Разве может Вселенная иметь границу! — обличали философы. — А что же находится по ту сторону границы?»

Но Эйнштейн никогда и не думал говорить, будто наше пространство ограничено, заключено в какие-то пределы; он всегда полагал его безграничным. Он знал, что из него нельзя «выйти», подобно тому, как конькобежец выходил из круга, направляясь в раздевалку.

Однако безграничное не значит — бесконечное. Эйнштейн считал, что Вселенная имеет конечный объем. Это происходит потому, что пространство Вселенной не плоское, а искривленное, и кривизна его положительна. Оно есть некая замкнутая, как бы завернутая на себя структура. Подобно тому, как окружность есть «завернутая на себя» линия. А шар — «завернутая на себя» поверхность.

Скоро придет время поговорить нам подробнее о структуре нашего пространства, узнать, как разрешает эту проблему наука шестидесятых годов нынешнего века. Но уже и Риман предсказывал такую возможность из своего столетнего далека.

— То, что пространство есть неограниченное трижды протяженное многообразие, является допущением, принимаемым в любой концепции внешнего мира, — говорил он. — Но отсюда никоим образом не следует бесконечность пространства: напротив, если припишем пространству постоянную меру кривизны, то придется допустить конечность пространства, как бы мала ни была мера кривизны, лишь бы она была положительной.

Риман тоже поясняет свою мысль двумерной аналогией. Он показывает, как несложно нам, людям, представить себе «неограниченную поверхность с постоянной положительной кривизной, то есть такую поверхность, которая в плоском трижды протяженном многообразии приняла бы вид сферы и, следовательно, являлась бы конечной».

Ну, ясно, такая поверхность есть не что иное, как шар, как сфера.

Конечна или бесконечна эта поверхность?

Безусловно, конечна — вот она вся перед нами.

Гранична или безгранична она?

Безгранична. Сколько бы ни перемещаться по поверхности сферы, границы на ней нет. Так же, как, совершая кругосветное плавание, мы не обнаружим границы земного шара. И только оторвавшись от его поверхности, покинув палубу на самолете, уйдя в полет, мы пересечем границу между поверхностью земли и атмосферой.

Но это уже будет выход в третье измерение. Значит, не нарушая правил игры, оставаясь в пределах поверхности шара, то есть двух измерений, мы никакой границы не пересечем; мы ее попросту не обнаружим.

Разрешив коллизию «бесконечность — безграничность», Риман пытается найти глубокие подходы к секретам мироздания. Он говорит:

— Для объяснения природы вопросы о неизмеримо большом — вопросы праздные. Иначе дело обстоит с вопросом о неизмеримо малом. От той точности, с которой нам удается проследить явления в бесконечно малом, существенно зависит наше знание причинных связей. Поэтому вопросы о метрических отношениях пространства в бесконечно малом не принадлежат к числу праздных.

Неизмеримо большое и неизмеримо малое... Два полюса, к которым всегда стремилось и стремится человеческое познание.

Пристрастие Римана к бесконечно малому, к исследованию микропроцессов, причем не только в математике, но и в физике, нам известно.

Что же касается отношения к «неизмеримо большому», то оно несколько загадочно. Почему Риман считает праздными вопросы о неизмеримо большом? Почему он думает, что они не могут послужить «для объяснения природы»?

Постараемся поискать ответ среди собственных его, Римана, размышлений.

Обращаясь к астрономическим наблюдениям своего времени, Риман находит в них подтверждение «эвклидовости» нашего пространства. Если же кривизна его на самом деле все-таки отлична от нуля, — рассуждает Риман, — «то по меньшей мере можно сказать, что часть Вселенной, доступная телескопам, ничтожна по сравнению со сферой». То есть, если в действительности пространство не эвклидово, оно, по мнению Римана, во-первых, может иметь лишь положительную кривизну, а, во-вторых, кривизна эта так мала, что приборы уловить ее не могут. Доказать кривизну пространства или, напротив, опровергнуть ее наличие астрономия пока что не может.

Значит, праздность вопроса о неизмеримо большом не абсолютна. Она временная. Она вынужденная. И причиной тому — несовершенство наших знаний, невозможность получить научно строгий, а не спекулятивный ответ. Вот таким, примерно, может быть объяснение позиции Римана.

До сих пор Риман сравнивал эвклидово пространство с пространством постоянной положительной кривизны. Но дальше он рассматривает и другой гипотетический случай: непостоянную кривизну. Для этого случая, говорит он, «из метрических отношений в большом нельзя заключить о метрических отношениях в бесконечно малом: кривизна может иметь какое угодно значение, лишь бы в целом кривизна доступных измерению частей пространства заметно не отличалась от нуля».

Через полвека с небольшим Альберт Эйнштейн в общей теории относительности покажет, что кривизну нашего пространства определяют находящиеся в нем массы — звезды и другая материя. Чем больше масса, тем сильней искривляет она пространство. Значит, кривизна не одинакова в разных областях пространства. Хотя в целом, в среднем она может заметно и не отличаться от нуля.

Так найдет себе физическое подтверждение и эта гипотеза Римана.

Конечно, интегральное значение, значение кривизны «в большом» не дает возможности «заключить о метрических отношениях в бесконечно малом». Но науку ведь интересует не только микроструктура пространства. Ее не меньше волнует вопрос и о строении пространства всей Вселенной. Этот вопрос никак не может она посчитать «праздным». И Лобачевский говорил, что «сама природа указывает нам такие расстояния, по сравнению с которыми исчезают за малостью даже и расстояния нашей Земли до неподвижных звезд», и задумывался над геометрией пространства таких масштабов.

Поэтому слова Римана о праздности вопроса о «неизмеримо большом» хотелось бы объяснить только одной причиной, тем, что в это время для науки — физики, астрономии — был еще «зелен виноград».

Размышляя о геометрии, о структуре пространства в бесконечно малом, Риман высказывает чрезвычайно глубокие мысли. Может быть, тогда они вовсе ускользнули от внимания слушателей, всех, даже Гаусса. Сейчас они настолько созвучны представлениям физики, настолько современны, что их воспринимаешь как предвидение, как пророчество.

Прежде всего Риман подчеркивает, что фундамент, на котором построена обычная наша геометрия и который сам возник в процессе человеческой практики, что этот фундамент не применим, «теряет всякую определенность в бесконечно малом». А раз так, то вполне возможно, и даже вероятно, что и геометрические отношения в бесконечно малом также совершенно не похожи на известные нам, людям, законы геометрии.

Здесь, чтобы не было путаницы, необходимо маленькое примечание. Сейчас Риман размышляет о геометрии реального пространства. Поэтому слова «неизмеримо большое» и «неизмеримо (или бесконечно) малое» имеют не математическое, а физическое содержание. Неизмеримо большое, мы уже знаем, это — Вселенная или, по крайней мере, доступная нам область ее. А бесконечно малое, если перевести на современный язык, — микромир, мир элементарных частиц. А вовсе не бесконечно малое в математическом смысле, не тот способ «расщепления пространства», с помощью которого Риман построил свою геометрию.

О каком же опытном фундаменте геометрии говорит Риман? Фундамент этот — два чисто физических объекта — твердое тело и световой луч. Недаром Эйнштейн писал, что «в той мере, в которой можно говорить о существовании в природе твердых тел, эвклидова геометрия должна считаться физической наукой».

Геометрия и возникла как опытная наука, в основе которой лежали эмпирические — опытные, накопленные поколениями людей понятия и представления. Надо было научиться отвлекаться от их физической сущности и привыкнуть оперировать лишь математическими образами. Так линия, по определению Эвклида, есть «длина без ширины». Линию у древних имитировала веревка, а прямую линию — веревка, натянутая меж двух кольев. Физически даже самая тонкая веревка, даже нитка — все-таки «длина с шириной». Математики должны были научиться не замечать этого.

Потом прямую линию начали отождествлять с очень тонким световым лучом. И действительно, в геометрической оптике, например, луч света можно с полным правом считать прямой линией, которая подчиняется законам геометрии.

Но ведь на самом деле свет — это электромагнитные колебания, это волны. И еще задолго до того, как была открыта электромагнитная природа света, физики обнаружили, что свет обладает свойствами волны. Такие явления, как интерференция, дифракция, могут возникнуть только при наложении, взаимодействии световых волн. Поэтому в волновой оптике, которая изучает эти и подобные им явления, луч света уже никоим образом нельзя считать прямой линией.

То же самое следует сказать и о твердом теле. Пока его можно считать монолитом, пока можно отвлечься от происходящих в нем внутренних процессов, пока рассматриваются такие движения его, где оно перемещается как единое целое, до тех пор оно служит надежным эталоном для геометрических измерений и построений. Но это имеет место лишь «в большом», там, где действуют законы макромира и где твердое тело действительно можно рассматривать как монолит.

А едва мы вспомним, что в этом, на вид недвижимом, мертвом куске металла происходят непрерывные колебания кристаллической решетки и движение свободных электронов, то нам станет очевидно, что для измерений на расстояниях, соизмеримых с расстояниями между атомами решетки, наше «твердое тело» уж никак не применимо, и надо искать другие эталоны.

Таким образом, даже оставаясь в кругу только этих общих соображений, не вникая в суть, в физику явлений, можно понять глубину интуиции Римана, когда он говорит: «Мыслимо, что метрические отношения пространства в бесконечно малом не отвечают геометрическим допущениям». Особенно поражает, что такое могло быть сказано сто лет назад, когда физика не имела ни малейшего представления о микромире — в том его содержании, которое мы вкладываем в это слово сейчас.

Наука должна искать ответы не только на вопрос «как?», но и на вопрос «почему?». Эйнштейн говорил: «Мы хотим не только знать, как устроена природа (и как происходят природные явления), но и по возможности достичь цели, может быть утопической и дерзкой на вид, — узнать, почему природа является именно такой, а не другой. В этом ученые находят наивысшее удовлетворение.»

Наука о пространстве должна будет не только раскрыть строение, структуру пространства и в «бесконечно малом», в микромире, и в «неизмеримо большом» — в просторах Вселенной, на гигантских космических расстояниях. Она должна будет еще и объяснить, почему, в силу каких причин, каких физических процессов пространство в каждом случае, или в каждом данном месте, или в данный момент времени имеет именно такую структуру.

По-видимому, Риман осознавал, что должна быть какая-то связь между строением пространства и физическими процессами, в нем происходящими. Во всяком случае, в некоторых его мыслях ясно чувствуется стремление найти подходы как раз ко второй задаче науки — ответить на вопрос «почему?».

— Вопрос о том, справедливы ли допущения геометрии в бесконечно малом, тесно связан с вопросом о внутренней причине возникновения метрических отношений в пространстве. Этот вопрос, конечно, также относится к области учения о пространстве, — говорит Риман. И дальше, пытаясь проникнуть в самую суть природы вещей, он ищет причину в том, в чем искали и ищут ее ученые нынешних поколений.

— Или то реальное, что создает идею пространства, образует дискретное многообразие...— каким-то чутьем, интуицией, шестым чувством предугадывает Риман возможную структуру пространства микромира.

Считалось бесспорным, а во времена Римана и подавно, что пространство не только однородно во всех своих частях, но и непрерывно. Риман высказал чрезвычайно смелую, даже еретическую мысль: может быть, в бесконечно малом пространство имеет прерывистую структуру.

Что это значит?

Возьмем опять «твердое тело» — «сплошной» кусок металла. Мы-то знаем — а в девятнадцатом веке этого еще не знали, — что на самом деле «сплошной» кусок представляет собой дискретную структуру — кристаллическую решетку; атомы металла сидят в узлах этой решетки, на определенных расстояниях друг от друга.

По такому же принципу — хотя эта аналогия и очень груба, — возможно, построено и пространство микромира. Мы говорим — возможно, потому что решения сложнейшего этого вопроса нет до сих пор. Но многие физики склоняются к мысли, что в мире элементарных частиц и взаимодействий пространство действительно имеет дискретную, прерывистую структуру. И что характер этой структуры самым тесным, интимным образом связан с природой самих элементарных частиц.

О геометрии микромира мы еще поговорим на последних страницах книги, а пока вернемся к Риману. Мы оборвали его фразу на середине. Вот ее конец:

— ...или же нужно пытаться объяснить возникновение метрических отношений чем-то внешним — силами связи, действующими на это реальное.

Итак, не само пространство «по собственной воле» устанавливает свою геометрию, а «что-то внешнее», внесенное в пространство, формирует его структуру — то есть его метрику, его геометрию. Риман называет это внешнее силами связи, действующими на пространство, не расшифровывая, каков физический характер этих сил.

Эйнштейн в общей теории относительности покажет, что геометрия пространства действительно зависит от «внешнего», ее определяют массы. Массы создают поля тяготения, физическая суть которых и проявляется в искривлении пространства.

Силы тяготения и есть поэтому «силы связи» в римановском смысле, хотя сам Риман, вероятно, лишь нащупывал общий подход, а не имел в виду, да и не мог иметь, какое-то конкретное физическое решение. Вспомним его слова:

— Здесь мы стоим на пороге области, принадлежащей другой науке — физике, и перешагнуть его не дает нам повода сегодняшний день.

Герман Вейль, один из крупнейших математиков нашего века, комментируя Римана, писал:

«Полное понимание заключительных замечаний Римана о внутреннем существе метрики пространства стало возможным лишь после создания Эйнштейном общей теории относительности... Риман отказывается принять концепцию, до него разделявшуюся всеми математиками и физиками — будто бы метрика пространства независима от протекающих в нем физических процессов и будто реальное вступает в это метрическое пространство как наниматель в готовую квартиру».

Концепция эта разделялась не всеми. Помните, как Лобачевский связывал геометрию пространства с силами. Однако у него тоже это не имело конкретного содержания, а было лишь общим предположением, философским взглядом на природу вещей. «Сегодняшний день» девятнадцатого века даже самым сильным умам не мог дать повода перешагнуть тот порог, который отделял гениальные догадки от точных физических решений.

«Больше того, — говорит Вейль о Римане, — он утверждает, что пространство само по себе есть аморфное трехмерное множество и только наполняющее его материальное содержание организует его путем установления метрики».

Риман не заблуждается — пройдет еще много времени, пока наука найдет правильный ответ: покажет связь геометрии пространства с населяющей его материей.

— Решение этих вопросов можно надеяться найти лишь в том случае, — сказал Риман, — если, исходя из ныне существующей и проверенной концепции, основа которой положена Ньютоном, станем постепенно ее совершенствовать, руководствуясь фактами, которые ею объяснены быть не могут; такие же исследования, как произведенное в настоящей работе, именно, имеющие исходным пунктом общие понятия, служат лишь для того, чтобы движению вперед и успехам в познании связи вещей не препятствовала ограниченность понятий и укоренившиеся предрассудки.

В последних словах, хотя они не были обращены ни к кому персонально, Гаусс, быть может, почувствовал укор. Но, конечно же, позиция Римана — это естественная, нормальная позиция ученого. Посмотрите, как слова его перекликаются с репликой Яноша Бояи:

«В науке, как и в повседневной жизни, цель состоит именно в том, чтобы всемерно выяснить и ярко осветить необходимые общеполезные вещи, в особенности еще не вполне ясные, и вместе с тем пробудить еще дремлющее сознание истины. То обстоятельство, что, к сожалению, среди математиков имеется еще много поверхностных людей, конечно, не может служить основанием для того, чтобы и в дальнейшем заниматься только поверхностным и посредственным и оставлять науку в летаргии, в состоянии, унаследованном ею от прошлого».

Вот какое богатство идей заключалось в этой небольшой лекции, которой Риман должен был доказать свое право на скромный пост преподавателя университета.

Имеющие уши да слышат. А уж Гаусс имел и уши, и знания, и гениальную голову. Можно ли удивляться, что Гаусс ушел с заседания коллегии потрясенный...

А сам Риман, осознавал он всю огромность переворота, совершенного им в геометрии? Хочется думать, что осознавал. Хотя у нас нет никаких свидетельств этому.

На коллегии Гаусс промолчал. Остальные и не могли откликнуться.

Передал ли Вебер, тогда или позже, слова Гаусса, ге, что произнес он, возвращаясь после коллегии домой? Сомнительно. При жизни Гаусса все приближенные обязаны были строго блюсти его секреты. И после кончины далеко не сразу стали предаваться гласности «крамольные» мысли короля математики. Узнай Риман каким-нибудь образом о столь высокой оценке, он, конечно, написал бы об этом родным. Такое письмо неизвестно.

Снова Гаусс

Почему же и у порога смерти Гаусс остался верен себе?

Может, трудно отважиться на поступок, который равносилен словам: «Всю жизнь я был неправ». Трудно сказать такое другим, а еще труднее — признаться самому себе.

Да, бесконечно жаль, что и в старости Гаусс остался верен обету молчания. Можно представить, каким благотворным — не для Римана, для математики, для науки — стал бы глубокий и откровенный обмен мнениями... Но все это уже принадлежит суду истории.

Правда, история не только творится людьми, она ими и оценивается. А люди порой субъективны. И оценки могут быть разными, даже противоположными. Хотя исходят они из одних и тех же фактов, основываются на одних и тех же документах.

Так документы, связанные с Гауссом — с его работой, взглядами, отношением к науке, людям и себе, — и прежде всего его письма, казалось бы, известны достаточно хорошо. Но посмотрите, как по-разному истолковывают их разные люди.

Один, например, считает, что Гаусс любил математику ревнивой любовью мужчины, даже мусульманина, что он жестоко переживал, если хоть одна из его многочисленных наложниц улыбалась кому-нибудь другому. Отсюда такие непростые и часто не очень привлекательные его отношения с некоторыми математиками — с Яношем Бояи, Абелем, Якоби.

Другой, напротив, уверен, что Гаусс был совершенно равнодушен к славе, к приоритету, и только между прочим, в частных письмах отмечал, не обнаруживая при этом никакой горечи, если кто-либо из математиков публиковал работы, которыми он, Гаусс, занимался раньше.

Кто же прав?

Истину часто так нелегко установить...

Между тем нам интересно знать не только действия и поступки великих людей, но и мотивы поступков. Особенно, когда речь идет о действиях, сыгравших немаловажную роль не только в жизни этого человека, а, как в событиях, связанных с неэвклидовой геометрией, в жизни многих людей, больше того — в жизни целой науки.

Во-первых, это психологически интересно. А во-вторых, без знания мотивов поступков нет подлинной истории, в частности — истории науки; конечно, если рассматривать ее не просто как сумму накопленного человечеством знания, а действительно как историю, как последовательное постижение мира, при котором не только талант ученого, но и личность его играет немаловажную роль.

Расставаясь с Гауссом, вернемся в последний раз к одной из страниц истории неэвклидовой геометрии.

До недавнего времени все, от друзей и современников Гаусса до математиков последующих поколений, были согласны в том, почему Гаусс ни разу не высказался публично о неэвклидовой геометрии — ни слова не сказал ни о своих, ни о чужих работах.

Одни жестче оценивали вину Гаусса и перед наукой и перед теми, кто ждал его поддержки, другие пытались смягчить его вину, даже оправдывали поведение Гаусса: ведь «крики беотийцев» и в самом деле могли нарушить спокойствие и душевное равновесие великого математика и, возможно, даже в какой-то степени помешать его интенсивной и плодотворной работе.

Но при таком разном отношении, все единодушно называли одну причину молчания: Гаусс боялся растревожить «гнездо ос», боялся прослыть глашатаем крамольных воззрений, ниспровергателем незыблемых основ.

Кроме того, справедливо отмечалось, что Гаусс очень серьезно и ответственно относился к своим публикациям и тщательно дорабатывал сочинения, предназначенные для печати.

Что ж, здесь не о чем спорить. У Гаусса действительно не было ни одной законченной работы по неэвклидовой геометрии — были только отдельные наброски, касавшиеся тех или иных, главным образом — основополагающих, фундаментальных ее особенностей. И, вероятно, правильно, что Гаусс не стал предавать гласности эти не доведенные до конца и не оформленные отрывки. Тем более, что едва он успел написать Шумахеру, что «вот уже несколько недель, как я начал излагать письменно некоторые результаты моих собственных размышлений об этом предмете,... никогда мною не записанных...» (известное нам письмо 1831 года), как почта принесла ему уже напечатанный «Аппендикс» Яноша Бояи. А еще через несколько лет он прочитал «Геометрические исследования» Лобачевского, из которых, помимо прочего, узнал и о существовании других, ранее опубликованных работ казанского геометра.

Поэтому, вероятно, и не к лицу было ему, «королю математики», познакомившись с этими завершенными и в достаточной степени совершенными работами, публиковать свои отрывки. Пожалуй, правильно, что он оставил их среди своих черновиков.

Нет, не за это упрекал его Янош Бояи. Не за это упрекаем его и мы, люди последующих поколений.

Гаусс не должен был стоять в стороне, когда рождалась, и с таким трудом, с муками новая наука — ведь не было кроме него другой повивальной бабки, способной облегчить ей появление на свет.

Он не должен был, не смел отвернуться, когда на новорожденную и творца ее посыпались злые удары.

Он не должен был, не смел промолчать, когда надо было сказать свое — без сомнения, очень весомое слово.

А ведь он знал про удары и не оставался к ним безучастным.

Герлингу он писал, что в «Ученых записках Казанского университета» за 1834 год напечатана «Воображаемая геометрия». В примечании Лобачевский сообщает о пасквиле в «Сыне отечества» и о своем ответе на него, так и не увидевшем света. «...к этому сделано указание, — пишет Гаусс Герлингу, — что очень резкая критика этой работы («О началах геометрии») помещена в № 41 другого русского журнала «Сын отечества» за 1834 г., который, по-видимому, издается в Петербурге; Лобачевский послал возражение против этой критики, которое, однако, до начала 1835 г. не было напечатано».

Но не только у себя на родине поднялись осы над головой Лобачевского.

«Я вспоминаю, — продолжает Гаусс, — что в Repertorium'е Герсдорфа я тогда видел весьма отрицательную рецензию об этой книге; однако для каждого сколько-нибудь осведомленного читателя ясно, что она составлена совершенно невежественным человеком. С тех пор я имел случай сам рассмотреть это небольшое сочинение и должен высказать о нем весьма благоприятное суждение.»

Библиографический справочник «Герсдорф Репертториум» — известное в Германии издание. В 1840 году в нем появился отзыв на только что вышедшую на немецком языке работу Лобачевского «Геометрические исследования по теории параллельных линий». Рецензия эта, загадочно подписанная цифрой «140» (автора ее не удалось установить и по сию пору), менее злобна и отвратительна по тону, чем писания «Сына отечества», но не менее глупа и пренебрежительна. Гаусс сразу заметил ее и сразу на нее отреагировал. 1 февраля 1841 года он написал одному из своих учеников, астроному Энке:

«Я начинаю читать по-русски с некоторой беглостью и извлекаю из этого большое удовольствие. Г-н Кнорре прислал мне маленькую, написанную на русском языке работу Лобачевского (в Казани), и благодаря ей, так же как и одному небольшому сочинению на немецком языке о параллельных линиях (о котором имеется одна чрезвычайно глупая заметка в справочнике Герсдорфа), мною овладело большое желание прочесть побольше сочинений этого остроумного математика. Как сказал мне Кнорре, труды Казанского университета, написанные на русском языке, содержат массу его сочинений».

Итак, два письма, в которых упоминается о травле Лобачевского — Энке и, позднее, Герлингу. И все. Ни одного слова, сказанного публично, во всеуслышание.

На твоих глазах бьют человека, а ты — сильный, быть может, единственный, кто в состоянии остановить побоище, отворачиваешься, делаешь вид, что не заметил, а потом, наклонившись к приятелю, по секрету возмущаешься глупостью и подлостью невежд.

Да, атмосфера, которая царила при жизни создателей неэвклидовой геометрии, была действительно тяжела. Спустя почти столетие, на празднике, посвященном торжеству этих идей, советский математик Каган говорил:

«Иерихонская труба еще не прозвучала из могилы

Гаусса. Новые идеи еще оставались достоянием своих творцов. Горькие вопли Бояи, полные страсти и негодования, еще оставались достоянием старой военной переписки, на оборотной стороне которой Янош запечатлел свои одинокие страдания; Н. И. Лобачевский еще заглушал жестокую драму своей жизни напряженной работой на пользу родного университета.

Откуда это безграничное море клокочущей злобы, поднявшееся вокруг этих отвлеченных идей, казалось бы, лежащих по ту сторону добра и зла, за пределами людских страстей и живых интересов?

Старый геттингенский геометр из-под сводов своей обсерватории хорошо изучил человеческую натуру. Он понимал, как глубоко революционно новое учение, как решительно оно уничтожает осиные гнезда традиций, унаследованных от тысячелетий. Против мощных ударов глубокой революции, беспощадно сносящих старые устои, всегда сплачиваются самые разнообразные силы, в какой бы области эта революция ни происходила. А открытие неэвклидовой геометрии было величайшей революцией в области человеческой мысли, какую только знает история науки. Inde irae — Отсюда гнев».

Но самому Лобачевскому, лично, не послал Гаусс ни слова ободрения, поддержки, сочувствия.

И даже тогда, когда Гаусс предложил избрать казанского геометра в члены-корреспонденты Геттингенского королевского общества, даже тогда не сказал он ни слова о главном труде Лобачевского, о создании им неэвклидовой геометрии.

Больше того, Гауссу очень хотелось узнать о попытке Лобачевского экспериментально проверить неэвклидову геометрию. А узнать можно было лишь у автора, больше ни у кого. В том же письме Герлингу он пишет:

«Однако, относительно экспериментального обоснования, указанного в т. 17 Крелля (там была напечатана «Воображаемая геометрия» Лобачевского)... я не нашел ничего в работе от 1840 г.; я должен буду поэтому решиться написать по этому поводу непосредственно г-ну Лобачевскому, избрание которого в члены-корреспонденты нашего общества состоялось около года назад по моей инициативе».

Но написать «непосредственно г-ну Лобачевскому»

Гаусс так и не решился. Вдруг бы это оказалось «роковым» шагом к публичному признанию новых идей. Ведь не мог же он попросить или обязать Лобачевского сохранить письмо это в тайне, как обязал Тауринуса, как просил своих близких друзей. Лобачевский просто не понял бы такой просьбы.

Итак, вся линия поведения Гаусса в том, что связано с неэвклидовой геометрией, казалось бы, ясна и совершенно последовательна. И так же ясны и неизменны мотивы его поведения. Вернее, еще недавно все оценивали их, эти мотивы, одинаково. В последние годы появились две версии, иначе и по-разному объясняющие причины, побудившие Гаусса молчать, уклониться от открытого разговора о неэвклидовой геометрии.

Чем это вызвано? Может, прежнее объяснение показалось уж очень простым, лежащим на поверхности? Или нашлись новые документы, по-новому освещающие жизнь и умонастроение великого математика?

Нет, новые материалы не обнаружены. И едва ли такие могли или смогут появиться. Все наследие Гаусса так скрупулезно собиралось и исследовалось; все давным-давно изучено и опубликовано. И нет никаких причин ждать здесь находок. Новые гипотезы покоятся все на тех же, всем известных высказываниях, все на той же гауссовой переписке.

Так чем же вызвана весьма радикальная ревизия, почему авторы ее требуют «пересмотра дела» и «отмены приговора»?

Думается, причина одна. Очень хочется, чтобы великий человек был велик и в своих недостатках, в своих ошибках. Чтобы в нем не было ничего мелкого, унижающего его величие. И — вспомним Пушкина — «гений и злодейство — вещи несовместные».

В злодействе Гаусса никто, конечно, не обвиняет. Но мелкость, осторожность на грани трусости... это ведь все-таки было.

Однако не будем выносить приговор преждевременно. Выслушаем другие стороны. Познакомимся с иными точками зрения, иными объяснениями этого и вправду удивительного в истории науки казуса.

Существует, по-видимому, два — о других нам неизвестно, — объяснения или, точнее, два предположения, причем совершенно различных.

Версия первая.

Общепринятое, «тривиальное» объяснение не верно.

То, что Гаусс писал о «беотийцах», может быть, в лучшем случае, одной из причин его молчания, и притом не главной. Скорее всего, Гаусс, убеждая других, в конце концов постарался убедить и себя в том, что страх перед «криками беотийцев» вынудил его промолчать, ни слова не сказать публично в защиту неэвклидовой геометрии.

Гаусс вполне осознавал огромное значение новой геометрии, считал ее «проблемой первого ранга». Тогда почему он молчал и позволил Лобачевскому и Бояи опередить себя? Есть единственное мыслимое объяснение: причина заключается в том, что Гауссу не удалось найти убедительного доказательства правильности, непротиворечивости неэвклидовой геометрии. Интуитивно он верил в ее правильность, во всяком случае — логическую, но способа доказать это не нашел.

«С отчаяния» он даже попробовал прибегнуть к «чуждому» для математики методу — измерял сумму углов треугольника с вершинами на трех горах, но и таким способом не получил ответа на мучавший его вопрос. А раз не было уверенности и он не мог дать строгих доказательств, то, чтобы не уронить своего авторитета, не рисковать репутацией — лучше промолчать.

Версия эта не представляется убедительной.

Разве можно, и мог ли Гаусс смешать две такие разные вещи: вопрос о логической правильности, чисто математической непротиворечивости и возможности неэвклидовой геометрии и вопрос об истинном строении нашего пространства, о действительной геометрии Вселенной?

Согласиться с тем, что столь разные проблемы Гаусс считал идентичными, значит признать, что он просто недопонимал того, что было очевидно и для Лобачевского, и для Бояи. Но это не соответствует истине.

Вспомним, что писал Гаусс Тауринусу: «Все мои старания найти в этой неэвклидовой геометрии противоречия или непоследовательность остаются бесплодными, и единственное, что в этой системе противится нашему разуму, это то, что в пространстве, окажись эта система справедливой, должна была бы существовать некоторая сама по себе определенная (хотя нам и неизвестная) линейная величина. Но мне кажется, что мы, кроме ничего не выражающей словесной мудрости метафизиков, знаем очень мало или даже ничего не знаем о сущности пространства; мы не можем смешивать того, что нам представляется неестественным, с абсолютно невозможным».

Таким образом, логическая и, следовательно, математическая правильность неэвклидовой геометрии была для Гаусса в двадцатые годы уже несомненной. Над доказательством ее он всерьез не задумывался — даже в той мере, как думали об этом Бояи и Лобачевский; не тот у него был уровень разработки проблемы, а вернее, еще не пришло время для строгого доказательства непротиворечивости геометрической системы.

Что касается второго вопроса и связанного с ним измерения углов треугольника с вершинами на трех горах, то не надо думать, что Гаусс считал эту свою попытку определить истинную геометрию мира «унижением» для математики.

Как и Лобачевский, а впоследствии Риман и Клиффорд, Гаусс не мог не понимать, что строение реального пространства, а значит и раскрытие геометрии Вселенной — вне ведения математики. Только астрономия и физика, только опытные науки способны ответить на этот вопрос, это их дело и их право; право суверенное, а вовсе не отнятое у математики. Да и сам Гаусс никогда не был лишь «чистым» математиком, презирающим как «низшие» науки опытные, наблюдательные. И пусть он говорил, что математика — царица наук, а арифметика — царица математики, потому что в них логика и даже априоризм сильнее, чем в других естественных науках, сам он, как мы знаем, «не гнушался» ни физикой, ни астрономией, ни даже геодезией.

Так что никак нельзя считать убедительным такое объяснение молчания Гаусса:

доказательства того, какая геометрия истинна, нет; математика его не может дать вообще;

измерения и астрономические наблюдения тоже не дают ответа — по крайней мере, пока не дают;

значит, ему, Гауссу, высокому авторитету, остается молчать; он, Гаусс, король математики, не может рисковать своей репутацией, пока не уверен «на все 100%»;

придя к такому решению, Гаусс придумывает легенду о «крике беотийцев», убеждает в этой легенде всех, в том числе и самого себя.

Вторая версия, объясняющая поведение Гаусса, интереснее и неожиданней.

Гаусс даже не задумывался над вопросами непротиворечивости неэвклидовой геометрии, так далеко он просто не пошел. И под «беотийцами» в данном случае он подразумевал совсем не тех, кого понимали все, интересовавшиеся данной стороной жизни Гаусса, а наоборот — людей прямо противоположного образа мыслей, не сторонников, а противников априорности, догматизма.

Столь непривычное утверждение требует, конечно, более подробного разговора.

Сначала посмотрим, какова система доказательств, приводимых в подтверждение этой версии.

Пресловутое молчание Гаусса имеет те же самые истоки, что и сомнения его в возможности доказать пятый постулат, сомнения, длившиеся не один десяток лет. Истоки эти — мировоззрение Гаусса.

По своим философским взглядам Гаусс, подобно громадному большинству его современников, был идеалистом. В последние годы жизни он говорил своему близкому другу, что «наряду с этим материальным миром существует второй чисто духовный миропорядок, столь же многообразный, как и тот, в котором мы живем, — и мы должны приобщиться ему».

По мнению Гаусса, истины, лежащие в основе математики, имеют априорное, то есть не зависящее от опыта человечества происхождение. По крайней мере в отношении арифметики он безоговорочно утверждает, что она существует чисто a priori и что число есть создание только нашего духа. Геометрию Гаусс сначала тоже считал чисто априорной наукой, соглашаясь с Кантом в том, что пространство есть форма нашего сознания.

В 1817 году Гаусс начал сомневаться в априорном характере геометрии: «Я все больше прихожу к убеждению, — написал он астроному Ольберсу, — что необходимость нашей геометрии не может быть доказана, по крайней мере, ч е л о в е ч е с к и м умом и для ч е л о в е ч е с к о г о ума. Может быть, в другой жизни мы придем к другим взглядам на природу пространства, которые нам теперь недоступны. До тех пор геометрию следует ставить не в один ранг с арифметикой, существующей чисто, a priori, а скорее с механикой». В тридцатом году, когда рассеялись его сомнения в возможности неэвклидовой геометрии, он уже писал своим друзьям:

«По моему глубокому убеждению, учение о пространстве занимает в нашем априорном сознании совершенно другое положение, чем чистое учение о величине: нашим сведениям о первом не хватает полной уверенности в их необходимости, а следовательно, и в их абсолютной истинности, которая свойственна последнему; со смирением мы должны признать, что если число есть создание только нашего духа, то пространство и вне нашего духа обладает реальностью, которой мы не можем приписывать законы полностью и a priori».— Это письмо астроному Бесселю, написанное в 1830 году.

А вот отрывок из письма, которое два года спустя Гаусс написал Фаркашу Бояи: «Как раз невозможности различить систему Эвклида и систему неэвклидовой геометрии лежит самое ясное доказательство того, что Кант был неправ, утверждая, что пространство есть только форма нашего воззрения».

Исходя из этих писем, делается вывод, что Гаусс после открытия неэвклидовой геометрии вынужден был отказаться от привычной и близкой ему идеи — что пятый постулат Эвклида есть чисто логический закон, что он вынужден был признать объективность пространства: пространство не есть создание нашего духа, не есть форма нашего воззрения. Или, точнее, не есть только создание нашего духа, только форма воззрения, и мы не можем полностью приписывать ему законы.

Таким образом, сомнения в доказуемости пятого постулата снизили в глазах Гаусса ценность геометрии как науки. Пытаясь сохранить за геометрией хоть какие-то остатки априоризма, одновременно Гаусс с горечью вынужден был разжаловать ее из высокого звания царицы наук, которое теперь безраздельно стало принадлежать одной лишь арифметике.

Поэтому открытие неэвклидовой геометрии Гаусс переживал не как торжество человеческого разума, а как горькое разочарование, которое предлагал принять со смирением. Это переживание не могло не вызвать внутреннего сопротивления и на пути к открытию, его опубликованию и даже признанию результатов, полученных другими. В заключение автор этой версии говорит, что он не может отказаться от предположения, что в письме к Бесселю Гаусс понимал под беотийцами противников априоризма, которым он не желал выдавать тайну крушения своей веры в априорный характер геометрии.

Такова вторая версия объяснения, почему Гаусс ни разу не высказался публично о неэвклидовой геометрии. Версия действительно очень неожиданная, но и интересная, она возбуждает немало мыслей.

Прежде всего приходит мысль о том, что есть «материальное» и «духовное» в мире науки, или, как говорил Эйнштейн, о вечном противопоставлении двух неотделимых составляющих нашего познания — опыта и мышления.

В самом деле, казалось бы, все постижение мира происходит чувственным, опытным путем. Мы наблюдаем, «щупаем» мир, задаем ему вопросы, и в наблюдениях, в опытах, которые ставит природа и которые ставит человек, находим ответ.

Вот и Эйнштейн говорит, что чисто логическое мышление само по себе не может дать никаких знаний о мире фактов; все познание реального мира исходит из опыта и завершается им. Галилей стал отцом современной физики, вообще современного естествознания именно потому, что понял эту истину и внушил ее ученым.

Тогда какова же роль разума, если опыт есть начало и конец всех наших знаний о действительности? Что ж, он только лишь фиксирует данные проделанного опыта и придумывает новый?

Нет. Конечно, нет.

Прежде всего, человеческий разум создает науку, эту, по словам Эйнштейна, попытку привести многообразие нашего чувственного опыта в соответствие с некоторой единой системой мышления. В этой системе опыты сопоставляются с теоретической структурой таким образом, чтобы соответствие их друг другу было однозначным и убедительным.

Только человек, только ученый, только его разум способен создать теорию как стройную логическую систему, охватывающую и объясняющую весь круг принадлежащих ей явлений. Эйнштейн не уставал подчеркивать, что никогда собрание эмпирических фактов, как бы обширно оно ни было, не может привести к исходным теоретическим посылкам.

На опыте можно проверить теорию, опыт может подсказать, в каком направлении надо вести поиски теории, но нет пути от опыта к построению теории.

Мысль эта повторяется Эйнштейном снова и снова:

— Чувственные восприятия нам заданы; но теория, призванная их интерпретировать, создается человеком. Она является результатом исключительно трудоемкого процесса приспособления: гипотетического, никогда окончательно не законченного, постоянно подверженного спорам и сомнениям.

— Я убежден, — говорил Эйнштейн, — что чисто математическое построение позволяет найти те понятия и те закономерные связи между ними, которые дают ключ к пониманию явлений природы.

Почему?

— Весь наш предшествующий опыт приводит к убеждению, что природа является осуществлением того, что математически проще всего представить, — отвечает Эйнштейн.

Здесь опять можно спросить: почему?

Ответ, вероятно, единственный.

Мозг человека — такое же творение природы, как и весь окружающий мир. Поэтому законы мышления есть органичная часть законов бытия. И строятся они по какой-то единой схеме, пусть пока еще не очень доступной, не очень понятной ученым. Вот это единство, корреляция между мышлением и окружающей природой и позволяет мозгу постичь законы, по которым живет и действует мир, в том числе и законы собственной его, мозга, деятельности.

Такое объяснение, наверное, правильно. Но оно немедленно порождает новый вопрос. Известно, что за последние, скажем, три-четыре тысячи лет никакой заметной физиологической эволюции человек, в частности мозг его, не претерпел. Аристотель был, по-видимому, не менее сильным философом, чем Гегель, а Архимед не менее гениальным физиком, чем Галилей или Бор. Почему же мозг работает «созвучно эпохе»? А если и с опережением, то сравнительно небольшим. Почему он выдает ту продукцию, которую человечество, пусть в лице самых сильных умов своих, в состоянии переварить и усвоить? Если где-то в клетках мозга века уже закодирована теория относительности, то почему появилась она в 1905 году, а не три тысячи лет назад, почему автором ее был Эйнштейн, а не гениальный Архимед, даже не близкий нам Галилей?

Если в мозгу человека закодированы все те безумные идеи, которыми богата нынешняя физика, если ученые с жадным нетерпением ждут, что вот появится одна, еще более безумная, которую и предсказать, предугадать сегодня еще никто не может — такая безумная, что позволит, например, наконец построить строгую теорию элементарных частиц, то почему ее ждут именно сейчас? Почему идеи появляются именно тогда, когда их ждет наука? И тогда уж они, бывает, появляются одновременно, как фиалки весной...

Наверное, все дело в том, что если мозг есть, как мы теперь понимаем, некий аналог кибернетического устройства, то в существующие в нем ячейки памяти надо заложить программу. Ему надо задавать вопросы, тогда он, подобно машине, сможет выдать ответ. С той только разницей, что машина, созданная человеком, всегда дает ответ на правильно и в соответствии с программой поставленный вопрос, а для человеческого мозга, даже самого гениального, это всегда сложнейшие, мучительные поиски, одновременно полет фантазии и тяжкий труд.

В каждую эпоху наука ставит вопросы, сложность которых определяется собственным ее уровнем. И на них она получает — раньше или позже — ответы от мозга. Ответом может быть и отвлеченная теория, а это уже — исключительно продукт мышления.

Поэтому, как сказал Эйнштейн, надо разрешить теоретику фантазировать, ибо иной дороги к идеям для него вообще нет. Разумеется, речь идет не о бесцельной игре фантазии, а о поисках самых простых и логичных возможностей и их следствий.

Опыт, естественно, остается единственным критерием, единственным судией математического построения в физике. Но собственно творческое начало относится к математике.

Теперь, после только что сказанного, попробуем иначе истолковать содержание, которое Гаусс мог вложить в подчеркнутое им слово «только»: Кант был неправ, утверждая, что пространство есть только форма нашего воззрения; пространство и вне нашего духа обладает реальностью, которой мы не можем приписывать законы полностью и a priori.

Может быть, здесь опять все дело в двух различных истолкованиях понятия «пространство». У пространства, построенного чисто логически (или математически), геометрия есть действительно создание человеческого ума. Геометрия же реального пространства сама есть объективная реальность, ее можно познать, но нельзя приписывать ей свои законы.

В подобном же смысле, как мы видели, развил потом оба эти направления геометрии Риман. И сам Гаусс никак не мог смешивать эти понятия. Не мерил же он углы при вершинах гор, полагая при этом, что измеряет треугольник, который есть чистое создание его, Гаусса, духа. Ведь несмотря на то, что Гаусс был идеалист и как религиозный человек верил в «иной мир», он не смешивал эти разные вещи: систему геометрии, построенную логически, то есть создание духа, и геометрию реального пространства — создание природы. Так же, как не смешивал их и Риман, который тоже был религиозный человек.

Вот так можно прочесть оба письма Гаусса.

Но если Гаусс все-таки на самом деле воспринимал открытие неэвклидовой геометрии как крушение своего мировоззрения, всех своих устоев?

Это, вероятно, крайне важный и интересный вопрос: что бывает, когда ученый сталкивается с фактами, противоречащими не просто его теории — такой случай достаточно прост, даже банален, — а всему его мировоззрению, философскому отношению к миру? Может ли он «закрыть» свое открытие, если собственная философия с ним не согласна, вступает с ним в спор?

Самый яркий, всем известный пример — отношение Эйнштейна к квантовой механике. Он, один из первооткрывателей теории квантов, всю жизнь не мог принять краеугольного камня новой механики — ее статистического, вероятностного подхода к явлениям микромира. Знаменитая слегка ироническая фраза о том, что он не верит, будто бог играет со Вселенной в кости, скрывала мучительный процесс неприятия новых воззрений, внутренней борьбы с ними. А внешнюю, открытую борьбу он вел упорно и долго.

Оказавшись в этой позиции в полном одиночестве, Эйнштейн шел с открытым забралом на защиту своих убеждений. Он придумывал все новые, самые изощренные аргументы и опыты — экспериментальные и логические — для доказательства своей, как ему казалось, правоты.

Нильс Бор потом не раз отмечал, насколько важной и плодотворной для развития и упрочения квантовой механики стала эта длительная дуэль с Эйнштейном. Признавая себя побежденным в каждом бою, Эйнштейн продолжал верить, что истина все же на его стороне, и страстно продолжал искать ее. Потому что истина была для него дороже всего.

Так как же с Гауссом — действительно ли для Гаусса открытие неэвклидовой геометрии было горьким разочарованием, крушением его мировоззрения? И содержание и тон его писем, эмоции, которыми они наполнены, никак не согласуются с подобным мнением.

Конечно, не тех «беотийцев» боялся Гаусс, которые были против априоризма, а значит, были сторонниками новых открытий, что бы они ни принесли, — а тех, кто был привержен старому, устоявшемуся, традиционному образу мыслей. В противном случае, как же можно истолковать знаменитое письмо Герлингу: «Я очень рад, что Вы имеете мужество высказаться так, как будто Вы признаете возможным, что наша теория параллельных линий, а следовательно, и вся наша геометрия ложны. Но осы, гнездо которых Вы разрушаете, подымутся над Вашей головой».

Почему же Гаусс рад, что Герлинг имеет мужество признать возможность неправильности геометрии Эвклида? Чему он может радоваться, если подобная возможность означает крушение всего его мировоззрения? Объяснить такое нельзя никак.

И «осы», значит, тоже противники априоризма? Если истолковывать это так, то весь приведенный отрывок теряет всякий смысл.

Как ни странно, обе версии, при всем их различии, даже противоположности, реабилитируя, «улучшая» человеческие качества Гаусса, одновременно принижают его как ученого.

Но, может, это важнее и справедливее? — спросит кто-нибудь.

Нет, дело не в том, конечно, чтобы «поднять» Гаусса как ученого и «опустить» как человека, или, наоборот, «поднять» как человека и «опустить» как ученого. Дело в истине, в правде. Самое важное и справедливое — установить истину. Чтоб в оценках не было никогда не только конъюнктуры, но даже и малейшей предвзятости. Потому что ничто не может быть важнее и дороже правды — и в науке, и в человеческих отношениях.

Герцен писал: «События были немы и темны; люди настоящего, входя в тайники, в которых они схоронены, берут свой фонарь и одни и те же факты освещают разно, изменяют тенями; прошедшее, чтобы получить гласность, проходит через гортань настоящего поколения; оно, как всякий предмет, готово раскрыть свою истину, но только желающему безусловной истины... Нет никакой необходимости натягивать по-своему смысл исторических событий и насиловать их для моральной цели, потому что истинный смысл их бесконечно глубже и нравственнее личных нравоучений. Дело историка — понять этот смысл и раскрыть его».

Прощание с геометрией

Пробная лекция напечатана не была. По-видимому, Риман не посчитал ее готовой для печати. И готовить не стал. Мы знаем, как трудно и неохотно публиковал он свои работы. А эта... Риман видел, что она словно канула в пустоту.

Сила общественного мнения велика. Она может поднять идею, а может и похоронить ее. Как часто люди проходят мимо большого открытия, если оно не рождено признанным авторитетом или хотя бы не освящено им. Приходится снова и снова поражаться силе духа Лобачевского, его приверженности — вопреки и наперекор всему — своей идее. Его многолетней неустанной работе над совершенствованием ее.

Риман ушел к другим проблемам. Правда, один раз он «согрешил» и вспомнил прошлое. В 1858 году Парижская академия наук объявила конкурс на соискание премии. Требовалось определить тепловое состояние неограниченного однородного твердого тела.

В этой частной задаче из области математической физики Риман увидел возможность применить и даже развить свою главную идею: устанавливать и описывать свойства пространства — в данном случае это было некое условное «пространство» — с помощью квадратичной формы. Таким способом он и решил задачу Парижской академии.

В пробной лекции отсутствовали всякие вычисления. Для Парижского мемуара Риман, вероятно, необходимые вычисления произвел. Но он проделал их для себя, для получения результата, и не счел нужным вставлять в работу.

В небольшом, написанном по-латыни сочинении сохранился лишь общий путь решения и приводились конечные результаты.

Парижские академики не потрудились разобраться в работе. А может, даже и не смогли...

Вероятно, Риману не оставалось ничего другого, как решить, что математика еще не созрела до понимания его идей. И он сам распростился с ними, теперь уже — навсегда.

К содержанию пробной лекции, особенно последней части, примыкают и некоторые философские и натурфилософские наброски Римана.

Это отрывочные заметки, иногда более подробные, иногда менее. Они не дают материала для построения развернутой картины мироздания. Скорее, в них проявляется «неутоленное желание научного духа, борющегося за всеохватывающее проникновение в явления природы и их объяснение с единой точки зрения».

Прекрасные эти слова сказаны Эйнштейном по другому поводу, но их можно с полным правом отнести и к работам Римана, как физическим, так и философским.

По существу, Риман всю сознательную жизнь в той или иной форме занимался философией, размышлял над основными законами бытия, пытался хотя бы для самого себя создать единую картину мира. Вспомним отрывок из его статьи об естественном образовании и письмо к брату, где он рассказывает, как его захватило «исследование по взаимосвязи основных физических законов».

В философских фрагментах содержатся лишь отдельные догадки, неясные, не очень оформленные мысли, бродившие в его мозгу. Не очень оформленные, но совсем не случайные, не мелкие. И потом нельзя забывать, что автор их — Риман, ученый, который дал науке столько новых, далеко не сразу принятых идей.

В предисловии к философским работам Римана Вебер писал: «Эти мысли сопровождали его многие годы жизни. Эти отрывки, несмотря на фрагментарность и незаконченность, являются началом и основой глубокого и самостоятельного мировоззрения».

Хочется привести хотя бы небольшую часть фрагмента «Тяготение и свет». Привести в «первозданном виде», не объясняя, не комментируя его. Потому что комментировать немножко боязно — рискуешь придать идеям Римана слишком современное звучание.

Пусть этот отрывок предваряет лишь маленькая историческая справка.

Теория электромагнитного поля (в частности — электромагнитная теория света) была разработана Максвеллом в период от 1865 года по 1873, когда он опубликовал свой «Трактат по электричеству и магнетизму». Этот труд — из основных вех на пути движения физики. В нем Максвелл теоретически предсказал существование электромагнитных волн и объяснил природу света, показав, что свет это тоже электромагнитные колебания, но определенного диапазона частот. Знаменитые «уравнения Максвелла», математически обобщающие его теорию, послужили одним из краеугольных камней для эйнштейновской специальной теории относительности.

Понятие поля тяготения как реального физического поля или физического искривления пространства ввел в науку Эйнштейн. В 1916 году им была окончательно сформулирована общая теория относительности, она же — теория тяготения.

Таковы даты и факты из истории физики.

А теперь посмотрим, что писал Риман в пятидесятых годах прошлого столетия:

«Существующую в каждой точке пространства определенную по величине и направлению силу ускорения я пытаюсь объяснить движением некоей субстанции, наполняющей все бесконечное пространство. Эту субстанцию можно представить себе как физическое пространство, точки которого движутся в геометрическом пространстве».

«На основании этого допущения, — продолжает Риман, — все воздействие весомых тел на весомые тела передается в пустом пространстве посредством названной субстанции. Таким образом, формы движения, лежащие в существе света и теплоты, посылаемых небесными телами, суть не что иное, как формы движения этой субстанции. Но названные явления, именно тяготение и распространение света сквозь пустое пространство, — единственные, которые должны были бы быть объяснены только движением этой субстанции.

Я допущу дальше, что действительное движение субстанции в пустом пространстве составляется из движения, которое должно быть допущено для объяснения явления тяготения, и из движения, которое должно быть допущено для объяснения явления света».

Как показал Эйнштейн, именно поле тяготения передает «воздействие весомых тел на весомые тела». Риман предугадал верно. И «явление света» есть тоже движение некоей субстанции — это открыл Максвелл, — но уже не поля тяготения, а электромагнитного поля. Риман интуитивно чувствовал, что оба эти явления, тяготение и свет — главные в физике, и проявляются они тоже в главных, хотя и различных формах движения одной субстанции — физического пространства.

Нам вскоре снова представится случай столкнуться с подобным же предвидением и смелостью мысли другого замечательного ученого, хотя и менее известного, чем Риман, — английского математика Клиффорда.

Эти идеи Римана, как и геометрические идеи, остались погребенными до конца его жизни. И не только они...

В начале нынешнего века, когда появились на свет записи некоторых курсов римановских лекций, математики были буквально потрясены богатством их содержания. Один из них, Клейн, говорил:

«Они позволяют нам увидеть, насколько полными были представления Римана о предметах, которые считались открытыми спустя годы после его смерти, хотя в своих лекциях он их уже излагал. Мы снова понимаем, насколько развитие науки зависит от случайностей. Насколько иначе развивалась бы математика, если бы хоть один из слушателей Римана глубже проник в ход его мыслей, чем это было на самом деле, или мы нашли бы раньше записи его лекций. Как много усилий пропадает из-за недопонимания...».

Лекции Римана были насыщены новыми идеями, открытиями, методами. Следуя своему учителю Дирихле, Риман служил «первоисточником» для студентов; он читал им то, что его самого занимало, являлось предметом собственных его исследований. То это были Абелевы функции, то курс «Гравитация, электричество и магнетизм», то еще какая-нибудь новая проблема математики или математической физики.

Стать хорошим лектором ему было очень нелегко. Помимо застенчивости пришлось преодолевать и другие «природные недостатки» — чрезмерную быстроту мысли, чрезмерную силу фантазии.

Риман упорно учился быть педагогом. Он писал отцу: «Я теперь привыкаю к тому, чтобы думать больше о своих слушателях, чем о себе самом, и читать по выражению их лиц, должен ли я идти дальше или надо еще прояснить вопрос».

Внешне спокойная, бедная событиями текла жизнь Римана.

Но необыкновенно богата была она внутренним напряжением, непрерывной работой. Неутомимая, не знающая пауз и роздыха мысль захватывала все новые и новые территории планеты Математики.

Жизнь, бедная событиями, но богатая горькими потерями. Умирает отец и вслед за ним сестра; через несколько лет — горячо любимый брат и другая сестра. Потом — учитель его Дирихле...

И еще богата была жизнь в эти последние годы признанием и почестями. Если отклика на свои открытия в геометрии Риман так никогда и не услышал, то другие его фундаментальные работы — по теории функций, по интегральному исчислению, в которых не было столь ошеломляюще новых идей, математики приняли с благодарностью. Берлинская Академия, Баварская, Парижская, Лондонское Королевское общество — все они избирают Римана своим членом. И Риману, теперь уже профессору, наконец-то становится легче жить, материальные заботы больше не тяготят его.

Но давно подкрадывающаяся болезнь обрушилась со всей силой.

Единственное средство лечить легкие — солнце, тепло, мягкий климат Италии.

Италия дала Риману не только солнце, тепло и выздоровление, но и счастье. Счастье почувствовать себя не скованным условностями, царившими в немецкой профессорской среде, свободным среди свободных людей; счастье общения с обретенными здесь друзьями, с природой, живописью, архитектурой сразу полюбившейся ему страны.

В эту первую поездку — вместе с молодой женой, подругой его сестер — Риман пробыл в Италии всю зиму. Он близко сошелся с тамошними учеными — Бетти, Феличе, Тассинари, Бельтрами.

Полный сил и надежд, Риман собирается на родину.

Но выздоровление было обманчивым. Очень скоро болезнь снова показала себя.

Часть пути Риману пришлось проделать пешком. Переход через Альпы по снегу стал роковым. Риман простудился и вернулся домой совершенно больным. Осенью того же шестьдесят третьего года он снова в Италии.

Третье путешествие Римана на Апеннины было и последним. В то лето 1866 года все было для него последним. Он приехал умирать сюда, в дорогую ему Италию, в тихий любимый городок Лаго-Маджиоре.

Ему еще не исполнилось сорока, но болезнь, полуголодная молодость, непрестанная напряженная работа, потеря близких истощили запас жизненных сил. Яснее всех он понимал, что остались считанные дни, и просил врачей лишь сказать — сколько. Ему надо было знать точно, чтоб закончить самое важное из последних исследований. На этот раз самым важным была физиология — слух и механизм уха. Еще за день до смерти, сидя в саду под финиковой пальмой, он работал.

А назавтра пришла к нему тихая, без мук, кончина. Казалось, он, великий ученый, великий открыватель, всегда стремившийся проникнуть в сокровенные процессы природы, в глубины мироздания, и сейчас наблюдает за собой, пытается раскрыть тайну смерти...

О чем он думал в предсмертные минуты? О науке, о боге? О своей жене, о шестимесячной дочери, которой придется жить без отца в этом трудном мире?

— Поцелуй нашего ребенка, — было последнее, что он сказал. И еще: — Прости нам наши прегрешения.

Жена почувствовала, как в руке ее холодеет его рука.

Так умер Риман. Сто лет назад.

Трудно даже оценить его влияние на современную математику, да и на физику тоже. Поэтому трудно и написать о Римане-ученом. Каждая линия его творчества, как в цепной реакции, разветвляется, порождает лавины новых идей и течений. Недаром Курант говорил:

«Риман — центральная фигура, если рассматривать историю развития математики нашего времени, он совершенно исключительная фигура, если рассматривать математику в историческом движении. Риман — не только в том, что он написал или чему учил, а прежде всего в том духовном направлении, которое в его творчестве нашло особенно точное и ясное выражение».

То же сказал и Клейн: «Непревзойденный гений Римана был впереди своего времени и самым широким образом повлиял на будущее развитие математики».

Мы попытались рассказать лишь о том в творчестве Римана, что причастно к кругу идей, которому посвящена эта книга.

После Римана, до Эйнштейна

Риман остался навечно в итальянской земле.

И Италия стала страной, откуда идеи неэвклидовой геометрии начали триумфальное шествие по миру.

Как ни странно, это не более чем совпадение. А странно потому, что тот, с чьим именем связан новый этап в геометрии, Эудженио Бельтрами, был дружен с Риманом.

Талантливый математик, занимавший профессорские кафедры в университетах многих итальянских городов — Болоньи, Пизы, Павии, Рима — Бельтрами в шестидесятых годах всерьез увлекся как раз дифференциальной геометрией — геометрией в бесконечно малом. Среди других задач он исследовал поведение в бесконечно малом квадратичной формы для элемента длины. То есть, в 1864 году, когда Риман был в Италии и общался с Бельтрами, итальянского математика глубоко занимал тот же круг проблем, которому за десять лет до того было отдано внимание самого Римана.

Но, надо полагать, неэвклидовой геометрии в своих разговорах они не касались — быть может, для Римана это стало уже делом далекого прошлого. Во всяком случае, когда Бельтрами познакомился с «пробной лекцией», ее содержание оказалось для него полной неожиданностью.

...1868 год был необыкновенно урожайным. В печати одна за другой появились три статьи. Сначала Бельтрами опубликовал свой мемуар «Опыты интерпретации неэвклидовой геометрии». Потом Дедекинд напечатал «пробную лекцию» Римана «О гипотезах, лежащих в основании геометрии». Вслед за тем вышла работа Гельмгольца с почти таким же названием: «О фактах, лежащих в основании геометрии». Наконец, завершением этого цикла стал другой мемуар Бельтрами, написанный спустя несколько месяцев как отклик на пробную лекцию — «Основы теории пространств постоянной кривизны».

Этот взрыв активности не был случайным, он подготовлялся исподволь. Но как обычно при бурном процессе, сыграл свою роль и катализатор. Таким катализатором стало обнародование переписки Гаусса с Шумахером — его другом, астрономом из Альдоны.

После смерти Гаусса обет молчания, который он неизменно налагал на своих друзей, сохранять уже не было нужды. И с 1860 года начинается публикация его многолетней переписки. В течение нескольких лет из печати выходят пять томов.

Среди огромного эпистолярного наследия Гаусса были и знакомые нам письма — о неэвклидовой геометрии, о Лобачевском, о Яноше Бояи, — те размышления, догадки и эмоции, которые более полувека наполняли собой жизнь Гаусса.

Неизвестно, читал ли эти письма Риман. По-видимому, волнение, которое они возбудили, никак его не коснулось. Как это вышло, понять трудно. Потому что математический мир был крайне взбудоражен.

Первым письма Гаусса «открыл», во всяком случае публично, французский математик Гуэль. В 1866 году он издал на своем родном языке «Геометрические исследования по теории параллельных линий» Лобачевского, сопроводив их отрывками из переписки Гаусса и Шумахера.

Как мы помним, «Геометрические исследования» Лобачевский написал по-немецки специально для того, чтобы сделать свои идеи доступными математикам Европы. Кроме того, по изложению эта работа была наиболее легкой для восприятия.

«Геометрические исследования» были опубликованы в 1840 году и довольно скоро попали на глаза Гауссу. Впечатление было настолько сильным, что Гаусс не мог не поделиться им с Шумахером.

Но на публичную поддержку Лобачевского или самой неэвклидовой геометрии Гаусс не отважился. И вся тридцатилетняя работа Лобачевского канула будто в пустоту.

Теперь, благодаря Гуэлю, писавшиеся словно ни для кого сочинения Лобачевского сразу обрели аудиторию. Их стали читать, изучать, осмысливать. Очень заинтересовался новой геометрией и Бельтрами: «Из писем видим,— отмечал он,— что Гаусс был предан этим идеям и можем убедиться в его полном согласии с учением Лобачевского».

Не надо, однако, думать, что прозрение наступило мгновенно. Наоборот. Образы геометрии Лобачевского настолько противоречили привычным представлениям, что новые идеи вызывали активное сопротивление даже у математиков, наиболее восприимчивых к новому. Они ведь тоже люди, и им тоже трудно привыкнуть к тому, что прямая — не прямая, и плоскость имеет кривизну, и сумма углов треугольника может уменьшиться до нуля; трудно, даже если «несуразности» эти освящены авторитетом великого Гаусса.

Вот тут-то и сказал свое слово Бельтрами.

Среди проблем, связанных с геометрией поверхностей, Бельтрами увлекала и картография, то есть способы изображения поверхности Земли на плоском листе бумаги. Занятия картографией привели Бельтрами к скрупулезному исследованию поверхностей постоянной кривизны, и прежде всего — крайне мало изученных поверхностей постоянной отрицательной кривизны. Эти последние были настолько вне поля зрения математиков, что наиболее типичная из них, псевдосфера — аналог шара, но с отрицательным радиусом — до Бельтрами вообще не была известна. Точнее, о «мнимой сфере» почти за сто лет до Бельтрами говорил математик и философ Ламберт — один из тех, в ком тоже зародились идеи неэвклидовой геометрии. Но о работе Ламберта, видимо, забыли.

Теперь Бельтрами заново открыл псевдосферу, он же дал название «псевдосферические» всему классу поверхностей постоянной отрицательной кривизны. Но главное, он сделал то чрезвычайно важное для неэвклидовой геометрии открытие, о котором мы с вами уже говорили.

Именно Бельтрами обнаружил, что на псевдосферических поверхностях осуществляется в натуральном, можно сказать, виде геометрия Лобачевского. Другими словами, каждая псевдосферическая поверхность есть какая-то часть плоскости Лобачевского. И все законы геометрии Лобачевского на ней неукоснительно выполняются.

Открытие это не было случайным. Бельтрами его активно искал и сознательно шел к нему.

«Мы старались дать себе отчет о результатах, к которым приводит учение Лобачевского, — писал он, — и затем мы попытались отыскать реальное основание для этого учения, прежде всего, чтобы признать этим самым необходимость нового порядка вещей и идей».

Значит, Бельтрами не только сознательно шел к своему открытию, но и ясно понимал, во имя чего оно делается, видел конечную цель его — доказать математикам возможность геометрии Лобачевского, «необходимость нового порядка вещей и идей».

Цель была достигнута.

Появление мемуара Бельтрами совершило переворот в умах. Всех потрясло неожиданное воплощение совершенно фантастических, непредставимых, казалось, образов, созданных чистой логикой, в самую реальнейшую реальность. Выходило, что можно не только увидеть, но даже пощупать пальцами кусок плоскости Лобачевского, провести карандашом по линии, которая есть доподлинная прямая этой плоскости.

Возможность различных геометрий — разных обличий, в которых предстают перед нами геометрические понятия,— Риман установил в общей, абстрактной форме. Бельтрами, не ведая о работе своего немецкого друга, нашел конкретную модель для одной, первой из новых геометрий. И то была не полуанекдотическая комбинация «стола», «стула» и «пивной кружки» Гильберта. То была геометрия, положившая конец многовековому «тираническому» господству Эвклида. Геометрия более общая, включавшая в себя эвклидову геометрию как частный, предельный случай.

«Торжество новых понятий не может пошатнуть истин, уже приобретенных,— писал Бельтрами,— оно может только изменить их положение в науке. Глубокая критика принципов не может никогда повредить прочности научного здания».

Противникам Лобачевского пришлось замолчать, сомневающимся — обрести веру. «Воображаемая геометрия» стала реальностью.

Однако это было гораздо больше, чем только моральная победа.

Помните, всю жизнь Лобачевского мучило сознание некоторой незаконченности своей работы. Он был убежден в справедливости, в логической непротиворечивости созданной им геометрии. Как бы далеко ни развивал он ее — а мы знаем, что он последовательно расширял области ее приложения — нигде и ни разу не пришел он к противоречию. Какие бы задачи он ей ни задавал, она их всегда разрешала. Его геометрия неизменно была верна себе и своему творцу.

Но этого было мало для такой сверхстрогой науки, как математика — значит, мало и для самого Лобачевского. Математика не могла удовлетвориться тем фактом, что гиперболическая геометрия ни при каких построениях и расчетах не приводит к противоречию, к абсурду. В математике в отличие от римского права действует принцип презумпции виновности: тут требовалось доказать, что геометрия Лобачевского *не может* привести к абсурду.

Бельтрами это доказал, он выступил блистательным адвокатом новой геометрии и выиграл дело.

Он выиграл дело в тот самый момент, когда показал: смотрите, на этих, псевдосферических, поверхностях осуществляется геометрия Лобачевского.

Реально существующие объекты — вот искомое доказательство. То, что существует, не может быть ложно, не может привести к абсурду, не может заключать в себе противоречия.

Так просто? Да, так просто, когда уже найдено. Так неимоверно сложно, пока неизвестно, на каких подступах искать.

Раз постулаты Лобачевского правильны для каких-то существующих в нашем пространстве объектов, в частности — для псевдосферических поверхностей, никакие выводы и следствия из них никогда не приведут к противоречию.

Чтобы вывод этот стал для нас убедительным, давайте нарисуем, хотя бы мысленно, одну из псевдосферических поверхностей — ну, например, псевдосферу, и расскажем себе, что происходит — с ней и на ней.

Прежде всего — что происходит с н е й?

С ней ничего особенного не происходит. Она, как и мы с вами, существует в эвклидовом пространстве. Поэтому для нее, как и для нас, действительны законы эвклидовой геометрии. И если, опираясь на эти законы, мы напишем уравнение данной псевдосферы, то, коль скоро эвклидова геометрия верна, не содержит в себе противоречий, уравнение будет точно описывать свойства этой псевдосферы.

Мы знаем, что в земных условиях, для земных масштабов законы эвклидовой геометрии безусловно верны. В иных условиях, для других масштабов, возможно, верна другая геометрия, построенная на неэвклидовых основах. Но возможность — и физическая и математическая — других геометрий, например, геометрии Лобачевского или Римана, не исключает внутренней правильности, непротиворечивости системы Эвклида. Она вполне логично строится на фундаменте своих аксиом. Все, кто «общался» с геометрией Эвклида, убеждены, что ни одно из ее положений, ни одна из ее теорем не могут привести к абсурду. Многовековой опыт человечества лежит в основе такой уверенности и подтверждает ее.

Итак, опираясь на законы эвклидовой геометрии, мы получили точное, достоверное описание нашей псевдосферы — одной из жительниц эвклидова мира. Это наш первый вывод.

Теперь посмотрим, что происходит на ней, на этой псевдосфере. На ней, как обнаружил Бельтрами, «живет и дышит» кусок плоскости Лобачевского, все фигуры которой, начиная с прямых и треугольников, следуют своим законам — законам гиперболической геометрии, резко отличным, как мы хорошо знаем, от эвклидовых.

Но ведь сам этот кусок плоскости Лобачевского живет в пространстве Эвклида, он совпадает всеми своими точками с эвклидовой псевдосферой.

Выходит, он ведет себя как слуга двух господ, приноравливаясь к требованиям обоих.

Помните, что на сфере кратчайшим расстоянием между двумя точками — аналогом прямой — была дуга большого круга? Но если мы взглянем на эту дугу из своего трехмерного пространства, то увидим, что она вовсе не прямая, а кривая, и чтобы получить кратчайшее расстояние между двумя точками — концами дуги, надо проткнуть сферу и соединить эти две точки «истинной» эвклидовой прямой.

Так и здесь. Пока псевдосфера «помнит», что она есть часть плоскости Лобачевского, ее прямые — кратчайшие расстояния между точками ее поверхности — есть прямые плоскости Лобачевского: по своему виду, по своим свойствам, по своим уравнениям, наконец.

Но тут псевдосфера получает грозное напоминание:

— Не забывайся, ты всего-навсего поверхность в эвклидовом пространстве, и веди себя соответственно.

Тогда, взглянув на себя «со стороны», псевдосфера видит, что ее прямые на самом деле кривые, а настоящих прямых, эвклидовых прямых, на ней нет и быть не может, и чтобы две ее точки соединить настоящей прямой, придется проткнуть ее поверхность.

Вот что значит служить двум божествам одновременно!

Зато такое двойственное, двусмысленное положение псевдосферы хорошо послужило Бельтрами — дало ему возможность доказать непротиворечивость геометрии Лобачевского.

Действительно, если на одной и той же поверхности выполняются и законы геометрии Эвклида, и законы геометрии Лобачевского, то с полной достоверностью можно заключить, что коль скоро не содержит в себе никаких внутренних противоречий геометрия Эвклида, то не содержит в себе никаких внутренних противоречий и геометрия Лобачевского.

Итак, лишь только геометрия Лобачевского нашла свое воплощение на реальных поверхностях эвклидова мира, она автоматически оказалась под защитой царящих в нем законов. Значит, и это, обязательное для науки свойство — не содержать в себе внутренних противоречий — распространилось на неэвклидову геометрию тоже.

Получается интересная, даже парадоксальная, на первый взгляд, ситуация: геометрия Лобачевского, родившаяся из отрицания одного из краеугольных камней эвклидовой геометрии, самоутвердилась, призвав на помощь свою, в некотором роде, «соперницу».

А произошло это самоутверждение в тот момент, когда Бельтрами, начертив на псевдосфере линии и фигуры, сказал: «Смотри!».

«Смотри». Одно это слово, стоящее под чертежом, у геометров древности считалось достаточным доказательством. Конечно, Бельтрами не ограничился только словами или только чертежом, он привел убедительные расчеты. Но, вероятно, самым впечатляющим для математиков было именно то, что встало вдруг перед их глазами.

Так возможность интерпретации — кстати, это слово тоже ввел в математику Бельтрами — неэвклидовой геометрии образами из геометрии Эвклида и стала доказательством ее правильности, ее непротиворечивости.

Итак, если непротиворечива одна геометрия, то непротиворечива и другая. А есть ли абсолютное доказательство?

Есть ли абсолютное доказательство, что эвклидова геометрия непротиворечива сама по себе? Или что сама по себе непротиворечива геометрия Лобачевского? Или геометрия Римана?

Оказывается, такая задача тоже выполнима. Она и была выполнена в самом конце девятнадцатого века Давидом Гильбертом, профессором Геттингенского (опять!) университета.

Если путь выбран верный, то каждый новый шаг что-то прибавляет, а не убавляет, он не заведет в дебри, а выведет на простор.

Бельтрами выбрал верный путь. Поэтому велики были возможности идти дальше, вперед, и математики их не упустили.

Вероятно, хорошо понимая все, так сказать, идейное значение своей интерпретации, Бельтрами не строил себе иллюзий. Он знал ограниченность ее применения и ни на минуту не обольщался тем, что сумел будто бы воплотить на своих моделях всю геометрию Лобачевского целиком. Он писал: «Думаем, что это удалось для планиметрической части этого учения, но нам кажется невозможным сделать то же для остальной части».

Вскоре математики нашли, что не только трехмерное пространство Лобачевского, но и двумерная «планиметрическая часть», то есть плоскость Лобачевского — вся целиком, простирающаяся в бесконечность, не может «уместиться» ни на одной реально существующей поверхности.

Причина в том, что любая из псевдосферических поверхностей имеет некоторые особенности — точки и линии перелома, нарушения однородности, тогда как в плоскости Лобачевского таких особенностей нет; она непрерывна, бесконечна и одинакова во всех своих частях.

Наглядность интерпретации Бельтрами оказалась связанной с определенными ограничениями. Но теперь математики уже знали, «где копать». Теперь, после того, как Бельтрами сделал первый, самый трудный шаг.

Были предложены другие интерпретации, и не только плоскости, но и пространства Лобачевского — в том числе и самим Бельтрами. Эти новые модели, хотя сами они имели конечные размеры, воплощали в себе все бесконечно протяженные образы геометрии Лобачевского. Такое достигалось ценой отказа от наглядности, от соответствия образов. Потому что прямая Лобачевского у Бельтрами тоже оставалась прямой — прямой псевдосферы. А в точных и исчерпывающих интерпретациях прямая могла быть, грубо говоря, и «столом», «стулом», и «пивной кружкой». А на деле, в интерпретации Клейна, например, прямыми плоскости Лобачевского служили хорды круга.

Авторы этих совершенных моделей пространства Лобачевского, Клейн и Пуанкаре — крупнейшие ученые, под чьим влиянием развивалась математика на рубеже прошлого и нынешнего столетий. Они, повторяем, решились уйти от наглядного воплощения образов гиперболической геометрии. Пожертвовав наглядностью, они выиграли в главном: сумели воплотить геометрию Лобачевского всю целиком. К сожалению, здесь нет возможности рассказывать об их моделях. Сейчас станет ясно — почему.

Как мы знаем, и Лобачевский, и Гаусс, и Бояи задумывались не только о логической непротиворечивости новой геометрии. Их волновала и другая сторона открытия — физическая. Каково действительное строение пространства, может ли оно быть не плоским, иметь отрицательную кривизну?

Этим же вопросом задавался и Риман. Он, произведя на свет целые семейства неэвклидовых геометрий, тем самым сильно усложнил и физическую задачу — выбор единственного реального пространства из всех мыслимо возможных. Однако два ограничения облегчали дело. Первое касалось числа измерений. Риман, как и все остальные, был убежден, что наше пространство трехмерно. Второе ограничение относилось к кривизне. Риман думал, что кривизна пространства если и отлична от нуля, то, по всей вероятности, постоянна — хотя бы в среднем, «в большом». Причем в отличие от создателей гиперболической геометрии Риман склонялся к тому, что кривизна пространства должна быть не отрицательной, а положительной.

Так более ста лет назад уже определялись два противоположных взгляда на строение пространства, хотя сторонники их сходились на том, что оно может быть не эвклидовым. Как мы скоро увидим, единоборство этих взглядов не разрешилось и по сей день.

1868 год по справедливости можно считать переломным для неэвклидовой геометрии — с него началось массовое признание новых идей, появился активный интерес к ним. Неэвклидова геометрия, в широком своем смысле, не только завоевывает новых приверженцев; отныне она становится одной из магистральных дорог в математике. Все больше ученых увлекаются ею. Растет число работ, усложняется их содержание.

Но чем шире общее наступление, тем явственней отграничиваются в нем отдельные направления. Потому что никому не дано объять необъятное.

Может быть, наиболее серьезное размежевание прошло по границе геометрия — физика.

Развитие идей и математического аппарата неэвклидовой геометрии до такой степени усложнило эту науку, что в нынешнюю ее жизнь непосвященный едва ли сможет проникнуть. Да и вряд ли он отважится на такой безрассудный шаг.

Физическое же направление — то есть проблема строения пространства долгое время оставалась лишь предметом размышлений и догадок. Но в наши дни над разрешением ее бьется сильный отряд ученых: физиков — теоретиков и экспериментаторов, астрофизиков, астрономов. Больше того, с каждым годом растет убежденность, что космология, наука о строении Вселенной, стоит сейчас на пороге очень крупных свершений, и вот-вот можно ожидать открытий, касающихся самых фундаментальных, но неразгаданных пока свойств материи.

Здесь, в книжке, мы тоже подходим к развилке: геометрия — физика. И поскольку конечная наша станция — «Геометрия Вселенной», а перегон называется «После Римана, до Эйнштейна», ясно, какой из двух путей нами выбран.

Мы отдаем себе отчет, что очень многое при таком выборе — как и при всяком выборе — остается в стороне, вне поля нашего зрения. Причем вещи не только недоступные для нас, но и более простые, стоящие на том уровне трудности, который нам уже удавалось преодолеть. Остаются лишь от того, что не лежат на нашем пути. Потому что нельзя ведь объять необъятное.

По этой причине мы не стали рассматривать других — помимо предложенной Бельтрами — интерпретаций геометрии Лобачевского.

Александр Фридман, советский математик и физик, вложил в понятие интерпретации геометрии интересное физическое содержание. Он писал:

«Геометрическое пространство, или просто пространство, есть совокупность вещей, называемых точками, линиями, поверхностями, углами, расстояниями и т. п., стоящими между собой в определенных отношениях, устанавливаемых системой аксиом и вытекающих из этих аксиом теорем. Геометрическому пространству может отвечать физическое материальное пространство в том смысле, что каждой вещи геометрического пространства может соответствовать какой-либо образ пространства физического; соответствие физического пространства геометрическому может быть осуществлено весьма многоразличными и часто фантастическими способами: достаточно вспомнить многообразные интерпретации так называемых неэвклидовых геометрий, оперирующие с простейшими физическими образами».

Фридман говорит, что и теорию относительности можно рассматривать как грандиозную интерпретацию геометрического пространства четырех измерений, интерпретацию, оперирующую уже не с простыми, а с весьма сложными геометрическими образами.

«Необходимо здесь же указать, — добавляет Фридман, — что физическое пространство есть пространство материальное, что все образы пространства геометрического интерпретируются в физическом пространстве или материальными объектами, или же материальными действиями с ними.

В физическом материальном пространстве мы интерпретируем геометрические точки с помощью тех или иных материальных объектов; довольствуясь грубой интерпретацией, мы «изображаем» точки с помощью малых метрических тел, расположенных в нашем физическом пространстве (сравним точки на бумаге, геодезические знаки на земной поверхности и, наконец, для больших областей пространства — небесные тела), интерпретируя более тонко, мы определяем точки как места пересечения двух достаточно узких световых пучков, т. е. тоже при помощи более тонких, материальных объектов».

Это есть та интерпретация, говорит Фридман, с которой свыклись физики и которую все мы как нечто готовое принимаем для нашей привычной, «употребительной», по терминологии Лобачевского, эвклидовой геометрии.

Отделив «физику» от «математики», мы остановимся только лишь на общей — физической и философской стороне крайне интересной работы Гельмгольца «О фактах, лежащих в основании геометрии».

Герман Гельмгольц, один из крупнейших ученых прошлого века, пришел к тем же идеям, что и Риман, хотя путь его, физика, физиолога, на первый взгляд до удивительности отличался от римановского:

«Мои исследования о пространственных восприятиях в области зрения привели меня к исследованию вопроса о происхождении и сущности наших общих воззрений на пространство», — рассказывал Гельмгольц.

Но сам он отлично понимал, что разные отправные точки — это не главное:

«Я шел, в сущности, по тому же пути, которому следовал Риман... Иметь его своим спутником представлялось мне важным залогом верности избранного мною пути».

Однако эти исследования — не единственная заслуга Гельмгольца перед неэвклидовой геометрией. Он, вероятно, первым постарался популяризовать ее, познакомить с нею возможно более широкий круг людей.

Профессор Гейдельбергского университета, в 1870 году Гельмгольц перед большим собранием, на котором присутствовали все преподаватели и ученые университета, произносит речь «О происхождении и значении геометрических аксиом». Он говорит:

— Среди отраслей человеческого знания нет другой, которая, подобно геометрии, явилась бы перед нами в совершенно законченном, готовом виде, в полном научном вооружении, как Афина-Паллада из головы Зевса, — нет другой, перед эгидой которой так мало решались бы возвысить голос противоречий и сомнений.

Но все-таки решались, находились такие, которые решались... Первым возвысил голос человек из глубин России, Николай Лобачевский. Имя его только-только становилось известным математикам Запада. Гельмгольц знакомит с ним своих слушателей и старается в возможно доступной форме рассказать им о геометрии Лобачевского.

Но ему важно не просто донести до аудитории основные идеи новой геометрии. Еще важнее, быть может, показать особое философское их значение, тот переворот в миропонимании, который они неизбежно повлекли за собой, не могли не повлечь.

Пространство...

Что есть пространство?

Какова его природа?

Познаваема ли она?

Что человек о нем знает и что сможет узнать?

Связано ли оно с материей Вселенной или существует независимо, отдельно от нее?

И существует ли вообще?

Может, оно есть лишь создание человеческого ума или ума божественного?

С той поры, как человечество научилось думать и о предметах отвлеченных, стали возникать такие и подобные им вопросы. И не удивительно. Пространство есть вместилище всего сущего — от муравья до звездных скоплений. Разве можно не задумываться о нем, не пытаться постигнуть суть его?

Но к единому ответу наука ни разу прийти не смогла. Бывало, одно воззрение сменялось другим даже не у научных школ, не у поколений ученых, а у одного человека, у одного ученого.

Такую эволюцию претерпели, например, взгляды Канта. В конце концов Кант пришел к убеждению, что понятие пространства есть понятие врожденное, каким-то образом вне опыта данное человеку.

Мнение Канта разделялось многими философами и физиками, хотя далеко не всеми. Зато всеобщей была уверенность, что пространство, равно как и время, всегда и всюду неизменны и однородны, что свойства их абсолютны — не зависят ни от чего.

Ньютон так и писал:

«Абсолютное, истинное или математическое время само по себе и в силу своей внутренней природы течет одинаково, безотносительно к чему-либо внешнему.

Абсолютное пространство в силу своей природы, безотносительно к чему-либо внешнему, остается всегда одинаковым и неподвижным».

В согласии с этим все были также непререкаемо убеждены, что математическая сущность пространства выражена в столь же абсолютной, единственно возможной, геометрической системе Эвклида, а физическая сущность пространства и времени — в единственно возможной механике Ньютона.

Поэтому возникновение геометрии, отличной от эвклидовой, геометрии точной, не несущей в себе противоречий и в то же время требовавшей совершенно иного строения пространства, свидетельствовало неопровержимо:

нет врожденного понятия пространства, как нет и самого абсолютного, ни от чего не зависящего пространства;

то понятие пространства, к которому привыкли люди, возникло благодаря их практической деятельности, их опыту;

соответствует оно истине или нет — покажет дальнейший опыт, дальнейшее развитие науки;

наука, она одна, установит истинное строение пространства, а значит и даст ответ — какой геометрией описывается его строение.

Вот какую систему взглядов развил Гельмгольц в речи, посвященной геометрии Лобачевского. В этом, может быть, самая большая его заслуга перед новым мировоззрением.

В те же годы, что и Гельмгольц, жил и работал Уильям Клиффорд, молодой английский математик.

Клиффорд, вспоминают современники, любил детей, был веселым и жизнерадостным, хотя знал о своей неизлечимой болезни. Он не прожил и тридцати четырех лет и в 1879 году скончался от чахотки на острове Мадейра.

Имя Клиффорда не очень известно вне круга ученых, а это был великий мыслитель, не только математик, но и философ, много размышлявший над сложными сторонами бытия. Он, как редко кто, был чуток и восприимчив к новому и обладал невероятной способностью предвидения.

В Англии Клиффорд первым понял и принял идеи неэвклидовой геометрии, причем принял легко, без всякого внутреннего сопротивления, как принимаются вещи совершенно естественные и справедливые.

«Я достал Лобачевского, — писал он в 1870 году своему другу. — Это довольно несложно, просто Эвклид без порочного предположения, но прелестно, как одно вытекает из другого».

Подобно Гельмгольцу, Клиффорд начал пропагандировать идеи Лобачевского. Он тоже посвящает им публичную лекцию. Он с поразительной ясностью доносит до аудитории так полно постигнутую им самим глубину открытия, все, что в нем заключено — и явное, и тайное, — что имеет и навсегда сохранит непреходящую свою роль в познании мира:

— Чем Коперник был для Птолемея, тем был Лобачевский для Эвклида. Между Коперником и Лобачевским существует любопытная параллель. Коперник и Лобачевский оба славяне по происхождению. Каждый из них произвел революцию в научных идеях, воззрениях, и обе эти революции имеют одно и то же значение. Причина их громадного значения заключается в том, что они суть революции в нашем понимании космоса. До Коперника люди знали о Вселенной все. Они могли рассказать вам заученное наизусть все, что было, должно быть и будет...

Клиффорд разбивает вдребезги эту «заученную наизусть» догму. Он рисует, как Николай Коперник навел порядок в Солнечной системе. Как «предписал» Солнцу и каждой из планет занять положенные им места. Низведя Землю на скромную роль одного из небесных тел, обращающихся вокруг Солнца, Коперник лишил опоры церковную доктрину об особом, исключительном положении Земли во Вселенной, о божественном происхождении и высшей миссии нашей маленькой планеты.

Революция Коперника была очень смелой. Дерзкие идеи вызвали переворот в науке и миропонимании человеческом.

Объяснив смысл революции Коперника, Клиффорд обращается к «революции Лобачевского»:

— Если эвклидова геометрия верна, то мы знаем геометрию бесконечного пространства так же хорошо, как и геометрию любой части комнаты. Значит, у нас есть твердое знание чего-то, что касается всего космоса. Чего-то, что справедливо во всей Безграничности и Вечности. И это ч т о-т о Лобачевский и его последователи отняли у нас. Сегодня геометр ничего не знает о природе реального пространства в бесконечности; он ничего не знает о свойствах этого, ныне существующего пространства в прошлой или будущей бесконечности. Конечно, он знает, что законы, данные Эвклидом, выполняются с точностью, лежащей за пределами ошибки эксперимента, не только в том месте, где мы находимся, но и на таких расстояниях от нас, которые астрономы и мы можем представить; но он знает это о Здесь и Сейчас; за этими пределами лежит Там и Тогда, о которых он сегодня ничего не знает, но, может быть, будет знать в конце концов. Таким образом, вы видите, что действительно существует параллелизм между творчеством Коперника и его последователей и творчеством Лобачевского и его последователей. Благодаря этим двум революциям все разлетелось во взглядах на Вселенную, на Макрокосм, на Всё, как предмет человеческого познания.

Как и Гельмгольц, Клиффорд отлично понимал, что Николай Лобачевский посягнул ни больше, ни меньше, как на вековечные представления о строении Вселенной.

К сожалению, несмотря на усилия отдельных ученых, революция Лобачевского почти никем из его современников не была понята и в ту пору прошла незамеченной. Но с течением времени она, как нарастающая лавина, стала захватывать все новые области естествознания. Помимо своего неоценимого значения для чистой математики, революция, совершенная Лобачевским в геометрии, повлекла за собой величайшие изменения в нашем понимании реального пространства Вселенной и сыграла большую роль во всем дальнейшем развитии наших физических и космологических представлений.

Лобачевский и сам отчетливо сознавал, что революция в геометрии не обособлена, что она тесно связана с полным пересмотром взглядов на самую сущность взаимоотношений материи, времени и пространства. Он говорил:

«В природе мы познаем собственно только движение (речь идет о движении материи), без которого чувственные впечатления невозможны. Итак, все прочие понятия, например геометрические, произведены нашим умом искусственно, будучи взяты в свойствах движения; а поэтому пространство само собой, отдельно (от материальных тел) для нас не существует. После чего в нашем уме не может быть никакого прстиворечия, когда мы допускаем, что некоторые силы в природе следуют одной, другие своей особой геометрии».

Так в науке родилось небывало смелое воззрение: пространство существует не само по себе, в своем абсолютном, так сказать, гордом одиночестве, нет, оно теснейшим образом связано с движением материальных тел и потому-то обладает определенными геометрическими и физическими свойствами.

И это было сказано еще в первой трети XIX столетия, когда никакие опытные данные не могли подвести к такому открытию!

Эти взгляды сложились у Лобачевского, когда он был совсем молодым ученым, когда он раздумывал над истинностью и точностью математики, когда он только начал создавать свою геометрию. Вопросы строения реального мира — мира движущейся материи — и построения геометрии реального пространства шли неразрывно рядом.

Был ли Лобачевский убежден, вступая в противоречие с многовековым опытом человечества, что в мире действительно царит его «воображаемая геометрия»?

В решении этого важнейшего вопроса он был верен своим общим материалистическим принципам: критерием истинности любой геометрии может быть только опыт, например астрономические наблюдения.

— Спрашивайте природу! — восклицал он в «Речи о важнейших предметах воспитания».— Она хранит все истины и на вопросы ваши будет отвечать непременно и удовлетворительно.

Он понимал, что если его геометрия окажется истинной для реального пространства, то проявится это лишь на очень больших расстояниях. Вспомните, что он писал еще в первой своей работе:

«Нельзя не увлекаться мнением Лапласа, что видимые нами звезды и Млечный Путь принадлежат к одному только собранию небесных светил, подобно тем, которые усматриваем как слабо мерцающие пятна в созвездиях Ориона, Андромеды, Козерога и проч. Итак, не говоря о том, что в воображении пространство может быть продолжаемо неограниченно, сама природа указывает нам такие расстояния, в сравнении с которыми исчезают за малостью даже расстояния нашей земли до неподвижных звезд. После этого нельзя утверждать более, что предположение, будто мера линий не зависит от углов, — предположение, которое многие геометры хотели принимать за строгую истину, не требующую доказательств, — может быть, оказалось бы приметно ложным еще прежде, нежели перейдем за пределы видимого нам мира».

Клиффорд развивает эту мысль Лобачевского:

— Из того, — говорит он, — что одна часть пространства, которую мы знаем в практических вопросах, окажется во всех своих частях тождественной, ни в коем случае не следует, что в с е пространство всюду одинаково.

Такое допущение является лишь догматическим расширением (на область неизвестного) того постулата, который, быть может, уместен для пространства, над коим мы можем производить опыт, сказал Клиффорд. Построение таких догматических утверждений по отношению к неизвестному скорее дело средневекового теолога, чем современного ученого.

Клиффорд отлично видел истоки больших и малых заблуждений науки. Он понимал, что часто они коренятся не только в субъективной, личной ограниченности того или иного ученого, но и в объективной, не зависящей от человека ограниченной способности его познавать мир.

— Может явиться мысль, — говорил он, — что постулат о тождественности во всех частях нашего пространства имеет опору в том, что до сих пор никому не удавалось дать какое-либо геометрическое представление о кривизне пространства: но независимо от того, что человечество обыкновенно делает допущения относительно многих вещей, о которых не в состоянии составить геометрического понятия, я должен заметить, что мы не можем ожидать, чтобы какое-нибудь существо было в состоянии составить себе геометрическое понятие о кривизне пространства раньше, чем оно увидит его из пространства высшего измерения, то есть на деле — никогда.

Мы помним, как находил выход Риман, как он преодолевал ограниченность человеческих возможностей в восприятии различных неэвклидовых пространств. Свои способы интерпретации этих пространств и населяющих их образов — непредставимых для обычного человеческого сознания — находили и Бельтрами, Клейн, Пуанкаре. Они учились постигать их воспитанным в себе зрением ученого и рассказывать о них новым, специально созданным языком.

Но те, кто не способен на такое, те следуют нормальному течению мысли, нанизывают одно за другим звенья на цепь естественных, как они убеждены, допущений. Они видят, что пространство всюду одно и то же. Значит, кривизна его постоянна. Они видят, что она равна нулю. Значит, она всюду равна нулю.

— Это допущение, — говорит Клиффорд, — принимает в нашей геометрии следующую форму: две параллельные прямые или плоскости, которые, будучи продолжены как угодно далеко, нигде не пересекаются, имеют действительное существование в нашем пространстве. Это действительное существование, быть осведомленным относительно которого мы очевидно не можем, мы принимаем как постулат; мы рассматриваем этот постулат как вывод, построенный на нашем опыте, обнимающем то, что совершается в ограниченной части нашего пространства. Мы, очевидно, не имеем никакого права догматически распространять этот постулат на все пространство.

Будем справедливы. В те далекие века античности подобная цепь логических допущений, которая завершилась построением здания геометрии, была высшим проявлением человеческого гения, силы и мощи духа его. Но всему свое время. То, что стало или грозит стать оковами, должно быть сброшено. Сознавая все слабости человеческого духа, Клиффорд с тем большей страстью и непримиримостью сражается за раскрепощение его — сражается со всем, что препятствует раскрепощению, в том числе и с ним самим — ограниченным, слабым духом:

— Гипотезам, гласящим, что геометрический характер пространства может меняться во времени, суждено или не суждено — кто знает? — сыграть большую роль в физике будущего, но мы не вправе не рассматривать их как вероятное объяснение физических явлений, потому что их можно противопоставить повсюду распространенному догматическому верованию во всеобщность известных геометрических теорем — верованию, образовавшемуся благодаря столетиям непрерывного почитания гения Эвклида.

Какие же это гипотезы об изменении геометрии пространства во времени были тогда, сто лет назад? Неясно. Гипотезы такие неизвестны, наверное их просто нет. Скорее всего, это гениальные догадки самого Клиффорда — по скромности он не пожелал «застолбить» их.

Мы знаем, и Лобачевский и Риман размышляли о возможной связи геометрии пространства с населяющей его материей, с силами, исходящими от материи, — о связи, которая не может не отражаться на структуре пространства. Клиффорду, бесспорно, были известны их беглые мысли, их намеки. Может быть, именно они послужили толчком для его собственных идей, скорей даже не идей, а тоже беглых мыслей.

Пушкин говорил:

— Следовать за мыслью великого человека есть наука самая занимательная.

Последуем за мыслью Клиффорда. Пожалуй, никто, как он, не подошел так близко к современному пониманию связи между пространством и материей, между геометрией и физикой. Поэтому возможность искривленного пространства воспринималась им не как мистика и не как игра ума, а как вполне естественная научная гипотеза. И связывал он это возможное искривление с хорошо известными науке физическими процессами:

«Существо, живущее в этих пространствах (с переменной кривизной) с большой вероятностью приписало бы действие кривизны изменениям в его собственном физическом состоянии, ни в коем случае не связывая в своем толковании такое воздействие с геометрическим характером пространства.

Изменения формы тела, если они имеют место, могут быть приписаны нами таким «физическим причинам», как теплота, свет или магнетизм, которые, быть может, служат лишь именами для изменений кривизны пространства.

Спросим же себя: не можем ли мы рассматривать как изменения физического характера те действия, которые на самом деле обязаны своим происхождением изменению в кривизне нашего пространства? Не окажется ли, что все или некоторые из тех причин, которые мы называем физическими, свое начало ведут от геометрического строения нашего пространства?

Эти изменения кривизны во времени могут производить явления, которые мы не так уж неестественно приписываем причинам, не зависящим от геометрии нашего пространства. Мы можем зайти тут настолько далеко, что припишем явлению кривизны даже то, что в действительности происходит в явлении, называемом нами движением материи».

Клиффорд действительно зашел тут очень далеко. Так далеко, что подошел вплотную к главной идее общей теории относительности, которая объясняет движение тяготеющих масс именно искривлением пространства.

Пусть у Клиффорда это лишь неясные догадки, вскользь брошенные слова, за которыми не стоит никакой цельной концепции. Но в те годы такая концепция и не могла появиться. А то, что слова эти не случайны для него, сомнений нет. Потому что он повторяет их вновь и вновь, развивая одну и ту же мысль.

Наконец он скажет:

— Не сочтут ли физики более простым предположить, что пространство способно испытывать изменения кривизны и оказывать сопротивление этим изменениям, чем допускать существование тончайшей среды, проникающей повсюду в неизменном однородном пространстве.

Это уже наступление на эфир, на тот самый мировой, всепроникающий эфир, который долго владел умами физиков, снова и снова бросал вызов всем попыткам их сладить с собой и был окончательно побежден лишь Эйнштейном. Победа эта сопутствовала рождению теории относительности, иными словами, ею началась новая эра в физике.

Не надо думать, что Клиффорд был непосредственно причастен к этой победе. Да такое просто невозможно — он принадлежал к другому поколению ученых. Но на нашем пути от Римана к Эйнштейну Клиффорд занимает по праву принадлежащее ему место.

«Нет пророка в своем отечестве».

Казалось бы, ни к кому слова эти не подходят так абсолютно, как к Лобачевскому. Верно, не раз повторял он их себе за трудную свою жизнь. Может, и умирал, уверенный, что так бывает всегда...

Но вот прошло немного лет, и Россия заговорила о Лобачевском.

В России, и прежде всего в Казанском университете все отчетливее понимают, насколько нелепо положение, когда работы Лобачевского не только мало известны в своей стране, но и попросту недоступны, погребены в ничтожных по тиражу казанских изданиях, когда знакомство с идеями великого геометра идет окольным путем, через Запад. Все громче раздаются голоса, что пора исправить ошибку, покончить с многолетними заблуждениями, искупить вину перед своим гениальным соотечественником.

Но медленно дело делается. Однако в 1883 году издание сочинений Лобачевского, задуманное за пятнадцать лет до этого, стало, наконец, выходить в свет.

...Приближалось столетие со дня рождения Лобачевского. Сомнения в огромности вклада его в науку остались позади. Россия, да и не только Россия — весь мир готовился отметить дату.

Создается «Комитет для образования капитала имени Н. И. Лобачевского»: «Первым и главным назначением капитала будет учреждение достойной значения великого мыслителя и математика премии имени Лобачевского, носящей международный характер. Такая премия даст молодым ученым, посвятившим свои силы любимой Лобачевским науке, поддержку и ободрение и вместе с тем явится выражением единства всех культурных народов в их стремлении к научной истине.»

В Почетном комитете участвуют ученые Москвы, Петербурга, Киева, Рима, Парижа, Кембриджа, Мюнхена, Лейпцига, Глазго, Белграда, Турина, Генуи, Иены, среди них крупнейшие математики мира — Бельтрами, Гельмгольц, Пуанкаре, Дарбу, Кэли, Клейн, Софус Ли и крупнейшие ученые России — Ляпунов, Менделеев, Столетов, Зинин — всего сто десять человек.

Наступили торжества. Три дня праздновала Казань, а вместе с ней вся Россия, весь ученый мир день рождения Лобачевского. Свыше ста приветствий получил юбилейный комитет со всего света. Но, быть может, самая главная и самая привлекательная черта этого праздника была даже и не в широте его, не в особой торжественности и приподнятости, не в атмосфере преклонения перед великим ученым. Поражает удивительное, можно сказать, даже современное понимание и самой неэвклидовой геометрии, и ее общенаучного, философского значения. Такое понимание проявили не выдающиеся ученые века, а рядовые профессора университета.

Помните, в речи «О важнейших предметах воспитания» Лобачевский сказал:

— Мы живем уже в такие времена, когда едва тень древней схоластики бродит по университету.

Да, не тень древней схоластики, а могучий дух Лобачевского присутствовал в эти дни в актовом зале Казанского университета. Второе детище Лобачевского, университет, теперь сторицей воздавал своему создателю за все усилия, направленные на воспитание честных, смелых и мыслящих людей.

Духом Лобачевского, духом свободной мысли проникнуты были речи казанских профессоров. Дадим им сказать свое слово и на этих страницах.

Выступает профессор Васильев, председатель Физико-математического общества Казани:

— Идея Лобачевского — отвергнуть один из постулатов Эвклида, который Кант считал необходимой истиной, показать возможность логического построения геометрии и без этого постулатума и вместе с тем тщетность всех усилий доказать его — не была затеею капризного, бьющего на оригинальность ума, как думало большинство математиков, его современников. Задача, которую решил Лобачевский, была задача, которую ставили на очередь и математика и философия его времени. Но для того, чтобы усмотреть эту задачу, была нужна гениальность Гаусса и Лобачевского; нужны были настойчивость и трудолюбие последнего. Для нас останется всегда предметом благоговейного удивления и высокой патриотической гордости, что эту задачу, поставленную движением мысли передовых наций Европы, решил ученый, живший в далекой от центров умственной жизни Казани, никогда не покидавший России и не находившийся в живом непосредственном общении с мыслителями и геометрами Западной Европы.

Вопросы, поставленные нашим бессмертным геометром, относятся, очевидно, не только к области математики. От их решения зависят наши взгляды на общую философию природы.

В этом и проявляется величие идей Лобачевского. Чем сильнее удар от падения тяжелого тела в стоячую воду, тем дальше распространяется движение волн, тем более места они захватывают. Чем гениальнее мысль, тем большее число областей научного мышления подчиняется ее влиянию. В том, что идеи Лобачевского отныне будут все более и более интересовать не только математиков, но и физиков, астрономов, физиологов и философов, и состоит первая награда нашему геометру-мыслителю.

Пусть этот облик гениального и мощного мыслителя, пролившего новый свет и внесшего «новые начала» в одну из важнейших отраслей человеческого знания, вещает и всей России, что «на поприще ума нельзя нам отступать»!

Профессор Смирнов сказал:

— Обращаясь к истории человеческой мысли, — идей философских и научных, мы напрасно стали бы искать чего-либо аналогичного с идеей Лобачевского. Ее нельзя квалифицировать, она есть unicum, единственный экземпляр в своем роде. Вот оттого-то она так чарующе привлекает к себе внимание психолога и историка человеческой мысли.

Мне кажется, что Лобачевский стремился к более глубокому взгляду на мир, чем тот, который дают нам науки на началах математики. Простота и ясность основных принципов этих наук, по-видимому, мало удовлетворяла философским запросам его глубокого ума. Он не приходил в умиление от удобств эвклидовой геометрии. Лобачевский был смелый мыслитель, не знавший границ для своей мысли. Лобачевский поставил своей задачей отыскать новые пространственные законы, можно сказать, открыть новые пространства, — с особенными свойствами для новых предполагаемых, хотя пока еще и не доступных для опыта, сил и движений.

«Международная премия имени Лобачевского» стала почетной наградой для геометров, завоевать ее считалось большой честью.

В 1903 году премию получил известный немецкий математик Давид Гильберт, к тому времени сорокалетний профессор Геттингенского университета. В 1899 году Гильберт опубликовал большую работу «Основания геометрии», а затем, развивая тему, и другие сочинения, посвященные основаниям геометрии, иными словами — аксиоматическому построению геометрических систем.

В аксиоматике, развитой Гильбертом, заключалось и доказательство логической непротиворечивости разных геометрий, в частности — геометрий Эвклида, Лобачевского и Римана, то строгое, абсолютное доказательство, которого не удалось, как мы помним, отыскать самому Лобачевскому.

Для такого доказательства необходимо найти правильную и полную систему аксиом, на фундаменте которых и будет выстроена вся данная геометрия. Оказалось, что аксиомы, составляющие такую полную систему, должны удовлетворять трем условиям. Они обязаны быть совместны — то есть не противоречить друг другу; независимы — то есть ни одна не должна быть следствием другой; достаточны — то есть они должны быть такие, и их должно быть ровно столько, чтобы из них следовали все до одной теоремы данной геометрии.

Гильберт не только нашел общий подход к аксиоматике, но и сумел для каждой из известных геометрий, а также и для некоторых других более общих случаев построить правильную систему аксиом. За эти вот работы, высоко оцененные крупнейшим французским математиком Анри Пуанкаре, представившим свой отзыв Казанскому Физико-математическому обществу, Гильберту и была присуждена премия имени Лобачевского.

Через тридцать три года после празднования в Казанском университете столетия со дня рождения Лобачевского, там же и не менее торжественно отмечалось столетие рождения неэвклидовой геометрии.

Самую яркую речь произнес Вениамин Федорович Каган, один из крупнейших советских геометров, человек, влюбленный в Лобачевского и его творение, всю свою жизнь посвятивший развитию, разъяснению и пропаганде идей неэвклидовой геометрии.

«Здесь независимость открытия, отделенного пропастью от прошлого, напоминала легенду о творении. Здесь смелость научной мысли достигла высшего дерзновения, глубина проникновения и энтузиазм творчества граничили с самопожертвованием.

Тривиальный, ни в ком сомнений не вызывающий факт заключается в том, что математические истины познаются двумя путями: с одной стороны, интуицией в различных ее проявлениях, начиная с непосредственного воззрения и кончая сложными опытами, — и логикой, с другой стороны. Интуиция намечает, логика проверяет;

интуиция предуказует, логика устанавливает; интуиция открывает, логика доказывает.

Но о какой интуиции может быть речь в неэвклидовой геометрии? Разве каждое ее предложение не есть отрицание всякой интуиции, не противоречит всякой интуиции?

Отсюда заключали, что в процессе открытия неэвклидовой геометрии действующей силой была только чистая логика. Открытие неэвклидовой геометрии и рассматривается обыкновенно как победа логики над интуицией. Лобачевский создал «воображаемую геометрию»; в этом величие его творения, в этом источник всех нападений, которым оно подвергалось. Воображаемую геометрию нельзя списать с живой природы; воображаемая геометрия есть чистое творение человеческого ума.

Пусть это кажется парадоксом, но я утверждаю, что Лобачевский интуицией победил интуицию!

И такой ли уж это парадокс? Скажите, разве не с живой природы списаны все сказки и вымыслы, все эти гении и демоны, гномы и великаны, феи и чудовища? Разве человеческая фантазия когда-либо работала, когда-либо могла работать иначе, чем образами, усвоенными из живой природы? И волшебная сказка, созданная Лобачевским, есть чудное сплетение пространственных образов, перевитых тонкой сетью логических рассуждений. Все силы человеческого духа, логика и интуиция, трезвость и фантазия, анализ и синтез, все формы и силы мысли в своих, иногда противоположных проявлениях соединились для этого творения.

Эллинская геометрия, казалось, должна была составить изъятие из закона эволюции. Две тысячи лет тому назад она застыла в своих величавых, прекрасных формах, как зачарованная красавица в народной сказке. Но сто лет тому назад пришли три витязя: один из немецкой, другой из венгерской, третий из русской земли. Они окропили ее мертвой и живой водой. И геометрия воскресла к новой жизни, нет, к новой мощной эволюции, которая широко развертывается на наших глазах и в которой она как будто хочет захватить и механику, и физику, и космологию».

ГЕОМЕТРИЯ ВСЕЛЕННОЙ

«Революция в нашем понимании космоса»

Вспомним, как сказал Клиффорд о Копернике и Лобачевском: «Каждый из них произвел революцию в научных идеях, воззрениях, и обе эти революции имеют одно и то же значение. Причина их громадного значения заключается в том, что они суть революции в нашем понимании космоса».

Строение и развитие Вселенной всегда занимали ученых и всегда будут их занимать. Вопросы мироздания постоянно ставились и решались наукой — на все более и более высоком уровне — и будут ставиться и решаться вновь, пока будет существовать само человечество.

Каждое большое открытие, каждое совершенствование инструментов наблюдения заново раздвигают горизонты Вселенной. А за расширившимся горизонтом непременно открывается что-то доселе неведомое, что надо понять и объяснить. Новые факты, которым нет объяснения в рамках существующей теории, непременно заставят еще раз критически к ней обратиться — пусть она даже находится в идеальном согласии со всеми известными ранее явлениями. Теория, по-прежнему справедливая для большого круга физических объектов, потребует уточнения и развития, чтобы получить право заключить в свои рамки и вновь обнаруженные факты. А возможно, последние окажутся в таком непримиримом противоречии с фундаментом теории, что для них придется искать совершенно новые законы, создавать неизвестные прежде представления... Так было и так будет впредь.

И не удивительно, что в этом большом, вечно длящемся разговоре сказали свое слово и Лобачевский, и Риман, и Клиффорд. Удивительно, что слова их, сказанные сто и более лет назад, звучат так современно.

Луи де Бройль, один из создателей квантовой теории, говорил об Эйнштейне, что он одним ударом разрушает все затруднения — ударом мощного ума, руководимого глубокой интуицией в ощущении физической реальности.

Глубокая интуиция в ощущении физической реальности!

Ею сполна был наделен Риман.

Ею был наделен и Лобачевский (недаром повторял он: гений — это инстинкт). Она руководила им и помогла ему тоже одним ударом разрушить двухтысячелетние затруднения в геометрии и проложить дорогу новым представлениям о взаимных связях между свойствами пространства и движением материи. Как раз установление таких связей — одно из великих достижений физики двадцатого века!

За долгую историю науки — историю открытий и разочарований — сложилось незыблемое правило: чтобы утвердить какую-нибудь гипотезу, нужны многочисленные опыты и доказательства; чтобы опровергнуть ее, бывает достаточно и одного экспериментального факта, если он противоречит выдвинутой теории или просто не находит себе в ней объяснения.

Классическая физика, достигнув к концу девятнадцатого века небывалого расцвета, вдруг заметила, что она очутилась в тупике.

Виновником неприятностей оказался свет.

Когда стало неопровержимо ясно, что свет есть не что иное, как электромагнитные волны, сразу возник вопрос: что колеблется?

Волны на море — это колебания воды. Звук — колебания воздуха. А что такое колебания электромагнитные? В какой среде образуются волны? Прежде всего решили, что такая среда обязательно должна существовать. Назвали ее эфиром. Но найти название было делом легким. Предстояло определить физические свойства этой среды.

И тут начались затруднения. История попыток обнаружить эфир, построить механическую модель этой светоносной среды полна неожиданностей, провалов, непреодолимых преград.

Одни ученые полагали, что эфир должен быть подобен газу, другие утверждали, что он обязан быть похожим на желе. Существовала гипотеза, по которой выходило, что тела движутся сквозь абсолютно неподвижный эфир. По другой гипотезе, эфир увлекался движущимися телами без всякого сопротивления. По третьей — увлекался частично...

Все предположения подвергались экспериментальной проверке, и эксперимент неизменно отвергал каждое из них, одно за другим.

Знаменитый опыт Майкельсона — тонкие и сложные измерения, связанные с определением скорости света, когда излучающий источник приближается к наблюдателю и когда он удаляется от него, — вынес эфиру смертный приговор. Но, похоронив гипотезу эфира, он вызвал появление новой физической концепции, не только жизнеспособной, но и необыкновенно быстро возмужавшей. Это — теория относительности Эйнштейна, которая стала для современной физики тем же, чем была для классической физики механика Ньютона.

Одним из краеугольных камней созданной Эйнштейном сначала специальной, или, как она еще называется, частной теории относительности стал удивительный факт, обнаруженный при попытках определить физические свойства эфира, — факт постоянства скорости света. Она не складывается со скоростью источника, в отличие, например, от скорости звука. И то, что она всегда одна и та же, независимо от движения источника света или движения наблюдателя, — этот безусловный экспериментальный факт оказался в непримиримом противоречии с классическим законом сложения скоростей, а потому — со всей классической механикой.

Надо было найти выход из такого безвыходного положения, и Эйнштейн нашел его самым неожиданным образом. Он сделал смелый, революционный шаг. Он сказал: если измерения скорости светового луча в любых равномерно и прямолинейно движущихся системах дают одну и ту же величину, значит, с точки зрения наблюдателей, находящихся в разных системах, что-то происходит с самими «инструментами измерений» — масштабами и часами: размеры одного и того же тела, измеряемые в этих системах, окажутся разными, ход одних и тех же часов также будет в них различен. Другими словами, нет абсолютного, ни от чего не зависящего пространства, одинакового для всех. Нет и абсолютного времени, которое для всех текло бы совершенно одинаково. То, что классическая физика полагала безусловно неизменным — пространство и время — как раз и не является абсолютным.

Неэвклидова геометрия самим фактом своего появления нанесла первый удар вековечной идее абсолютного пространства. Теория относительности нанесла этой идее завершающий удар.

Но как физически проявляется изменение пространства в движущихся системах? Размеры, масштабы тел изменяются в направлении движения, они сокращаются. И неподвижный наблюдатель отметит, что сокращение будет тем больше, чем больше скорость движения системы относительно него.

А время затормаживается. Изменение времени физически проявляется в изменении частоты всех периодических процессов: если из неподвижной системы измерять ход часов в системе движущейся, то окажется, что ход этот будет замедленным и что частота колебаний атомов и молекул, измеренная таким же образом, будет меньше, чем в «своей», неподвижной системе.

С такими явлениями в природе долго не могли свыкнуться. И, естественно, возникал вопрос: как же мы не замечаем настолько удивительных вещей?

Эйнштейн это сразу же объяснил. Все дело в том, что эффекты, которыми «ведает» теория относительности, становятся значительными только при очень больших скоростях, сравнимых со скоростью света.

В повседневной жизни мы не выходим за пределы малых скоростей. Даже скорости спутников, как ни велики они, все-таки в 30—40 тысяч раз меньше световой!

Но когда изучаются космические лучи, когда рассчитываются ускорители, в которых заряженные элементарные частицы разгоняются почти до скорости света, тогда физики и инженеры без теории относительности не могут сделать ни одного правильного расчета.

В обычных условиях, в мире малых скоростей, законы Эйнштейна переходят в законы классической механики Ньютона.

— Как и все вещи в мире, физические понятия нельзя построить из мрамора на вечные времена, — сказал мексиканский ученый Томас Броди. — Они должны развиваться, расти, глубоко преобразовываться в соответствии с требованиями нашего все расширяющегося познания природы.

Так экспериментальный факт — факт независимости скорости света от движения его источника и движения системы, в которой его наблюдают, — заставил пересмотреть самые основные физические представления, казавшиеся такими простыми и такими незыблемыми, потому что взяты они были из повседневной практики жизни на Земле.

Путы, сковавшие геометрию, первым разорвал Николай Лобачевский. Он построил более широкую геометрическую систему — пангеометрию, — которая не отвергла, не сменила эвклидову геометрию, а просто отвела ей скромное место предельного случая. Потом Риман настолько расширил содержание геометрии, что и творение Лобачевского стало лишь частным случаем ее.

Путы, сковавшие механику, разорвал Альберт Эйнштейн. Он создал теорию относительности — физику быстрых процессов. Теория относительности не отвергла механику Ньютона. Она только отвела ей более скромное место науки приближенной, справедливой для движений, медленных по сравнению со скоростью распространения света.

Геометрия Лобачевского разрешила задачу, веками мучившую математиков.

Теория относительности разрешила загадку, устранила противоречие, обескураживавшее физиков.

История повторилась: снова «частный факт» вызвал революцию в наших общих понятиях. Но на этот раз к коренному перевороту в понятиях о пространстве присоединился переворот в понятии времени. И последний, пожалуй, произвел наиболее ошеломляющее впечатление. Даже Макс Планк, тот, с чьим именем связано появление квантов в физике, писал:

«Едва ли надо говорить о том, что новый — эйнштейновский — подход к понятию времени требует от физика величайшей способности к абстракции и огромной силы воображения. По своей смелости эта теория превосходит все, что было достигнуто до сего времени в спекулятивном исследовании природы и даже в философской теории познания; по сравнению с ней неэвклидова геометрия — просто детская игра. И все же в противоположность неэвклидовой геометрии, которая до сих пор может серьезно рассматриваться только в применении к чистой математике, принцип относительности имеет все основания претендовать на реальное физическое значение. По своей глубине и последствиям переворот, вызванный принципом относительности в сфере физических воззрений, можно сравнить только с тем переворотом, который был произведен введением картины мироздания, созданной Коперником».

Это было написано в 1909 году. Надо сказать, что большой группой ученых теория относительности была освоена и принята значительно раньше, она довольно быстро, по словам Зоммерфельда, «глубоко проникла в мышление физиков».

Итак, для каждой движущейся системы время и размеры тел, измеряемые в ней самой и из других движущихся систем, будут различными, и разница окажется тем больше, чем больше скорость движения этих систем друг относительно друга. Поэтому для описания событий, происходящих в каждой системе, удобно к трем пространственным координатам добавить четвертую — координату времени, так как все четыре координаты одинаковым образом связаны с относительным движением систем.

При таком описании все события будут происходить как бы в четырехмерном мире пространства-времени — его еще называют «миром Минковского—Эйнштейна».

Немецкий математик Герман Минковский в 1908 году, за полгода до смерти, в Кельне на Собрании естествоиспытателей и врачей прочел исторический доклад: «Пространство и время» — о геометрических основах теории относительности. Начинался он так:

— Воззрения на пространство и время, которые я намерен перед вами развить, возникли на экспериментально-физической основе. В этом их сила. Их тенденция радикальна. Отныне пространство само по себе и время само по себе должны погрузиться в тень, и лишь некоторый вид соединения обоих должен сохранять самостоятельность.

...По «закону о тесноте мира» Минковский встретился с Эйнштейном еще в конце прошлого века: восемнадцатилетний Альберт Эйнштейн стал студентом Федерального высшего политехнического училища в Цюрихе и слушал там лекции Минковского. Надо сказать, он был не на лучшем счету у профессора. Поэтому, когда появилась теория относительности, Минковский был поражен не только ее содержанием, смелостью и глубиной, но и тем еще, что автором ее оказался его бывший студент.

Он говорил Максу Борну:

— Это было для меня огромной неожиданностью. Ведь раньше Эйнштейн был настоящим лентяем. Математикой он не занимался вовсе.

...После Эйнштейна и Минковского физики стали рассматривать свойства именно такого четырехмерного мира, мира, в котором и пространство и время лишились былой абсолютности.

Эйнштейн писал:

«Мир физических явлений, названный Минковским просто «миром», естественно является четырехмерным в пространственно-временном смысле. В самом деле, он складывается из отдельных событий, каждое из которых описывается четырьмя числами, а именно: тремя пространственными координатами и временной координатой — значением времени».

Вот как излагал Фридман физическое содержание мира Эйнштейна — Минковского: если рассматривать три пространственные координаты и время как четыре координаты некоего четырехмерного пространства, то «при такой интерпретации движение любой материальной точки будет нам задано в виде кривой в этом четырехмерном пространстве; эта кривая вполне определит нам движение, т. е. жизнь нашей материальной точки, и, может быть поэтому и названа кривою жизни материальной точки. Мы, следуя установленной терминологии, будем называть эту кривую мировой линией, отвечающей нашей точке».

К сожалению, представить себе зрительно четырехмерное пространство-время человеку не дано.

Начав свою революцию в физике, Эйнштейн не остановился на полпути: он решил заключить в рамки новой теории то взаимодействие материальных тел, которое называется всемирным тяготением.

Уже специальный принцип относительности подорвал основы теории тяготения Ньютона. Одно из главных положений принципа относительности гласило, что скорость распространения света в пустоте вообще является предельной скоростью любых реальных процессов, протекающих в природе. Ни одно тело не может двигаться быстрее, ни один сигнал не может распространяться скорее, чем свет в пустоте.

Значит, никакого мгновенного действия вообще быть не может! Не может быть мгновенного дальнодействия и в теории тяготения Ньютона. Влияние массы одного тела на массу другого распространяется с конечной скоростью. Подобно тому как вокруг движущихся электрических зарядов создается электромагнитное поле, так в пространстве, окружающем всякое тело, создается поле тяготения. На смену идее мистического дальнодействия пришло убеждение в существовании совершенно реального, физически реального гравитационного поля.

Общая теория относительности Эйнштейна и есть новая теория тяготения. Вспомним пророческое предсказание Лобачевского о связи между силами, массами, временем, расстояниями, углами. Творец неэвклидовой геометрии сам связал, как мы помним, только расстояния и углы. В остальном его догадки были лишь озарением человека, глубоко чувствовавшего сокровенные тайны природы.

Эйнштейн нашел точные законы, отражающие все эти связи.

Пространство и время перестали быть независимыми от движущейся материи. С ньютоновыми метафизическими абсолютами было покончено.

Вся безграничная Вселенная наполнена телами, будь то гигантские звезды или мельчайшие частицы космической пыли. Массы этих тел (величина масс, их взаимное расположение, их относительное движение) создают поля тяготения, гравитационные поля.

Гравитационные поля существуют и меняются в пространстве и во времени. И свойства этих полей накладывают неизгладимый отпечаток на то пространство и на то время, в котором они существуют. Эйнштейн показал, что это значит. «Неизгладимый отпечаток» проявляется физически в том, что тяготеющие массы искривляют четырехмерный мир пространства-времени, в котором движутся тела. В свою очередь, это искривленное пространство-время — поле тяготения — определяет движение масс, их траекторию, их скорость.

Получается тесная взаимная связь: массы рождают поле, поле управляет движением, поведением масс.

Геометрия такого искривленного четырехмерного мира уже не будет эвклидовой. Правда, «отклонение от эвклидовости» пространства очень невелико даже вблизи огромных масс. Тем не менее именно оно, это отклонение, определяет всю картину строения Вселенной.

Ясно, что и вопрос о трехмерной геометрии нашего реального пространства становится вопросом чисто физическим, как это и предсказывали Лобачевский и Риман.

В пределах Солнечной системы эффекты общей теории относительности — и в частности искривление пространства — очень малы. Но оказывается, что чем больше рассматриваемая область Вселенной, тем бо́льшую роль играют в ней силы тяготения, а значит — тем сильнее теория относительности вытесняет механику Ньютона.

Где же та граница, за которой закон тяготения Ньютона становится неправильным, и существует ли вообще такая граница?

Точной границы, конечно, нет, и было бы странно, если бы в одной точке пространства действовала механика Ньютона, а в соседней она оказалась бы ложной.

Границы нет, но есть строгий критерий — надежный способ определить возрастание эффектов теории относительности и уменьшение точности законов Ньютона. Этим критерием является соотношение между геометрическими размерами, геометрическим радиусом системы и ее так называемым гравитационным радиусом.

Гравитационный радиус — величина, довольно трудно представимая. Но можно постараться дать о ней некоторое понятие, тем более что мы уже привыкли представлять и более сложные вещи. Прежде всего это есть мера массы тела или системы тел — чем больше масса, тем больше ее гравитационный радиус, то есть он, этот радиус, пропорционален массе. Если величину массы помножить на гравитационную постоянную (известную по закону всемирного тяготения) и разделить на квадрат скорости света, то и получится значение гравитационного радиуса. Так как гравитационная постоянная — очень малое, а квадрат скорости света — огромное число, то гравитационные радиусы крайне малы. Например, гравитационный радиус Земли будет всего 9 миллиметров, Солнца — 3 километра.

И у Земли, и у Солнца, и у Галактики геометрические радиусы в миллионы раз больше гравитационных. И здесь для расчета движения тел можно пользоваться законом Ньютона. Теория относительности дает только весьма малые поправки к нему.

Но картина меняется, как только от нашей Галактики мы перейдем к большим областям Вселенной, заключающим в себе не только множество различных галактик, но и сложные системы их, так называемые скопления галактик.

В гонке геометрического радиуса с гравитационным увеличение расстояния играет на руку последнему. Гравитационный радиус с расстоянием набирает силу и догоняет в росте своего соперника. Объем растет пропорционально кубу геометрического радиуса. При постоянной плотности вещества так же будет возрастать и масса, заключенная в этом объеме. Поэтому если геометрический радиус возрастает вдвое, то гравитационный, при неизменной плотности материи, увеличивается в восемь раз. А если геометрический радиус вырастет в десять раз, то гравитационный — в тысячу раз.

Наши телескопы проникают в космос примерно на десяток миллиардов световых лет. В этой области гравитационный радиус уже не намного меньше геометрического. Значит, гравитационные поля в таких масштабах уже далеко не слабы, и для исследования движения и взаимодействия небесных тел и систем надо пользоваться теорией относительности.

В общей теории относительности все было трудно для усвоения: и необычность ее физических идей, и особая сложность ее математического выражения. К тому же, в результате всех тончайших расчетов появлялись лишь весьма малые поправки к старой теории тяготения Ньютона. Вероятно, поэтому общая теория относительности не сразу завоевала себе признание.

Даже такой выдающийся и смелый физик, как Макс Планк, узнав, что создатель специального принципа относительности задумал расширить свою теорию и охватить ею всемирное тяготение, укоризненно сказал Эйнштейну:

— Все теперь так хорошо объяснено, к чему вы стали заниматься этими проблемами?

Известен занятный эпизод. Во время первой мировой войны знаменитый английский астроном Артур Эддингтон прочитал в Кембриджском университете доклад об общей теории относительности. По окончании к нему подошел кто-то из слушателей и поздравил его:

— Это был прекрасный доклад. Вы один из трех в этом мире, кто понимает и знает общую теорию относительности.

Эддингтон с сомнением покачал головой.

— Господин профессср, не нужно смущаться, вы слишком скромны,— начал убеждать его собеседник.

— Я не смущаюсь, — ответил Эддингтон, — я только думаю о том, кто же третий?

Но наступил день, когда и общая теория относительности обратила человечество в свою веру.

Альберт Эйнштейн на основании своей теории предсказал два неизвестных ранее эффекта — искривление траектории светового луча в поле гяготения и уменьшение частоты света, проходящего близ больших масс, — и объяснил странности в смещении перигелия Меркурия. Эти эффекты Ньютоновой теорией тяготения не объяснялись.

...Французский астроном Урбен Жан Жозеф Леверье знаменит тем, что теоретически предсказал существование восьмой планеты Солнечной системы. «Странности» поведения Урана, необъяснимые изменения его орбиты навели Леверье на мысль, что должна существовать еще одна планета, возмущающая движение Урана. И действительно, новая планета, названная Нептуном, была обнаружена в той точке неба, которую вычислил Леверье. Это произошло в 1846 году.

Гораздо менее известно, что Леверье обнаружил «ненормальность» и в движении другой планеты, Меркурия — необъяснимое смещение его перигелия.

Перигелием называется та точка орбиты планеты, которая расположена ближе всего к Солнцу. Оказалось, что у Меркурия — ближайшей к Солнцу планеты — эта ближайшая точка за столетие смещается на сорок три дуговых секунды больше, чем должна была бы смещаться из-за действия на Меркурий остальных планет Солнечной системы.

Ни сам Леверье, который попытался было предположить, что перигелий смещает некая неизвестная планета, находящаяся между Меркурием и Солнцем, ни другие астрономы девятнадцатого и двадцатого столетий не могли разгадать загадку.

Объяснение дал лишь Эйнштейн на основе общей теории относительности. Добавочное смещение перигелия есть результат искривления пространства, вызванного массой Солнца. Так как Меркурий расположен к Солнцу ближе всех других планет, то только для него эффект этот оказался достаточно ощутимым. Теоретические расчеты Эйнштейна и измеренная астрономами величина оказались в хорошем согласии.

«Представь себе мою радость, когда я... добился того, что уравнения согласуются со смещением перигелия у Меркурия. Несколько дней я был вне себя от радостного возбуждения», — писал Эйнштейн ближайшему своему другу физику Эренфесту.

Эйнштейн не только объяснил давно известное, но непонятное явление, но и предсказал — тоже как следствие общей теории относительности — новый, никем не наблюдаемый эффект: искривление луча света в гравитационном поле, в частности — в поле Солнца.

Свет — поток электромагнитной энергии — обладает определенной массой. Ее легко подсчитать по знаменитой формуле Эйнштейна, связывающей массу с энергией. Оказывается, огромная масса звезды, нашего Солнца, например, действует не только на соизмеримые по массе планеты, но и на ничтожные кванты света — фотоны. Проходя вблизи больших тел, световой луч испытывает заметное действие их гравитационных полей. Это явление можно представить и в геометрических образах: прямолинейный луч, пролетая мимо больших масс, движется в сильном поле тяготения, а такое поле, как мы уже говорили, проявляется в искривлении, в «неэвклидовости» пространства. Следовательно, двигаясь по «прямой» такого пространства, луч становится изогнутым.

Эффект искривления луча очень мал, но Эйнштейн подсказал, каким образом можно его обнаружить. Надо постараться зафиксировать положение неподвижной звезды, когда луч света от нее проходит около самой поверхности Солнца, где поле тяготения достаточно велико, чтобы ощутимо отклонить этот луч.

Первую проверку предполагалось провести в 1914 году. Полоса полного солнечного затмения должна была пройти по России, куда собиралась отправиться экспедиция немецких астрономов.

Но началась мировая война, и экспедиция, естественно, не состоялась.

Решающий для теории относительности космический эксперимент природа назначила на 29 мая 1919 года. На этот раз полное затмение должно было наблюдаться в южном полушарии Земли. Английские Королевское общество и Астрономическое общество отправили две экспедиции — одну в Бразилию, а другую на остров Принсипи у побережья Западной Африки. Вторую экспедицию возглавлял Артур Эддингтон.

Задача была ясна. Звездное небо обычно фотографируется, как нетрудно догадаться, ночью, когда солнце уже зашло. Свет от звезды, попадающий на фотопластинку, проходит вдали от Солнца и, значит, не испытывает его отклоняющего действия. Такой снимок был сделан заранее в одну из ночей, когда расположение звезд на небосводе совпадало, по астрономическим вычислениям, с картиной, ожидавшейся 29 мая. Во время полного солнечного затмения на несколько минут днем наступила ночь, ярко загорелись звезды. В эти-то минуты ученые поспешили сфотографировать тот же участок неба, но на сей раз — вблизи Солнца.

По Ньютону, снимки должны были быть тождественны. А сторонники теории относительности, естественно, ожидали, что они будут немного отличаться друг от друга. Результаты опыта не обманули их надежды. Звезды оказались на снимках несколько смещенными.

Промеры снимков и обработка их проводились долго и тщательно. Эйнштейн узнал о результатах лишь в сентябре 1919 года.

Он написал матери: «Сегодня хорошие новости! Г. А. Лоренц телеграфировал мне, что британская экспедиция действительно доказала смещение света вблизи Солнца».

В октябре цюрихские друзья Эйнштейна прислали ему открытку со стихами:

> Нет сомнений и в помине:
> Свет, как знаем мы отныне,
> По кривой в пространстве мчит.
> И Эйнштейна имя чтит.

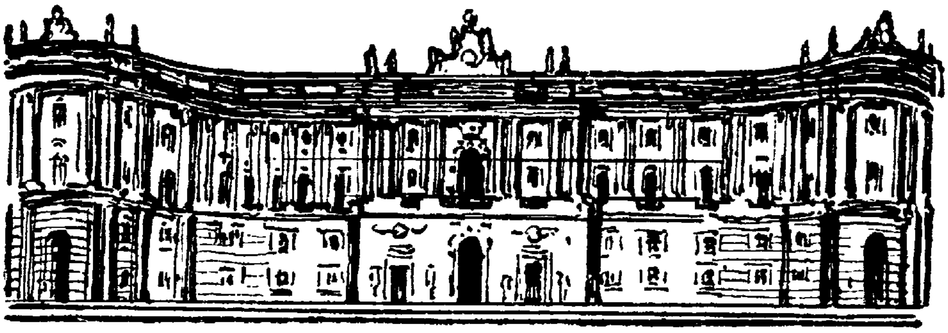
Эйнштейн ответил:

> Нам Солнце дарит жизнь и свет,
> Но строго бережет секрет
> От тех, кто зарится отнять,
> Кто слишком много хочет знать.
> Секретом поделясь с Луной,
> Оно утратило покой.
> А дальше было все, как сон:
> Похитил тайну Эддингтон.

6 ноября 1919 года в Лондоне в торжественной обстановке на совместном заседании обоих обществ — Королевского и Астрономического — объявили окончательную величину смещения. Она оказалась очень близкой к величине, вычисленной Эйнштейном. Президент Королевского общества назвал общую теорию относительности одним из величайших достижений в истории человеческой мысли.

Весь мир заговорил об Эйнштейне и о теории относительности. Это был подлинный триумф. Теория получила всеобщее признание. Представления, лежащие в ее основе, хотя они и не совместимы с привычными взглядами на окружающий мир, были приняты. Из области гипотез они перешли в сокровищницу точного знания.

Альберт Эйнштейн.



Берлин.
Королевская библиотека.

Как устроена Вселенная

В конце жизни Эйнштейн писал:

«Ньютон, прости меня. В свое время ты нашел тот единственный путь, который был пределом возможного для человека величайшего ума и творческой силы».

Итак, закон всемирного тяготения уступил титул «всеобъемлющего» теории тяготения Эйнштейна — общей теории относительности.

Теория относительности объяснила движение всех масс, всей материи — от лучей света до звездных галактик. Объяснила открытой ею «обратной связью» космических масштабов: движение масс вызывается искривлением пространства, искривление пространства вызывается населяющей его материей. В этом — суть закона всемирного тяготения Эйнштейна, такая «обратная связь» существует в любом доступном наблюдению уголке Вселенной.

Итак, на запрос науки, верна ли теория относительности, Вселенная ответила положительно — да, верна.

Но долг платежом красен. Теория относительности не могла остаться в долгу. Теперь, после того, как она объяснила, что происходит во Вселенной, ее задачей становится определение структуры, строения самой Вселенной в целом, в «неизмеримо большом», как сказал бы Риман.

Такой путь развития эйнштейновской теории вполне закономерен. И так же закономерно, что первый шаг на этом пути сделал сам Эйнштейн.

«Существенную роль общая теория относительности играет в космологии, учении о бытии и становлении пространства. Сам Эйнштейн дал толчок к этому своей работой от 1917 года, возникновение идеи которой я наблюдал еще в Берлине», — вспоминает Макс Борн.

Эта работа называется «Вопросы космологии и общая теория относительности».

«Я поведу читателя по дороге, пройденной мной самим, по дороге несколько непрямой и неровной, — предупреждает Эйнштейн, — так как только при этом я могу надеяться, что он отнесется с интересом к конечному результату. Я прихожу к убеждению, что уравнения поля тяготения, которых я до сих пор придерживался, нуждаются еще в небольшой модификации, для того чтобы можно было на базе общей теории относительности избежать тех принципиальных трудностей, которые... были указаны для ньютоновой теории».

Что же это за «принципиальные трудности ньютоновой теории»?

Ньютон полагал, что пространство наше бесконечно и бесконечно число звезд, его населяющих. Если бы число звезд было конечным, то, по расчетам, сила взаимного притяжения заставила бы их собраться воедино, в гигантский звездный клубок — а этого ведь не случилось.

Но, с другой стороны, бесконечное количество равномерно распределенных в ньютоновом пространстве звезд должно было бы создавать яркую и равномерную освещенность всего неба — а ведь и этого на самом деле тоже нет.

Кроме того, из расчетов следовало, что в бесконечности само тяготение должно возрастать бесконечно, а такое не может не вызвать огромной скорости движения небесных тел. Это так называемый «гравитационный парадокс», который привел в большое смущение физиков, потому что на опыте ничего подобного не наблюдалось.

Все попытки связать концы с концами успеха не имели.

В большой работе, посвященной теории относительности, в главе «Космологические затруднения теории Ньютона» Эйнштейн писал:

«Мир бесконечен в пространстве (и времени). Всюду существуют звезды, так что хотя плотность материи в отдельных случаях весьма различна, в среднем она всюду одинакова. Иными словами: как бы далеко ни проникать в мировое пространство, всюду мы найдем рассеянные скопления неподвижных звезд примерно одного типа и одинаковой плотности.

Это представление несовместимо с теорией Ньютона. Больше того, последняя требует, чтобы мир имел нечто вроде центра, где плотность звезд была бы максимальной и чтобы эта плотность убывала с расстоянием от центра так, что на бесконечности мир был бы совсем пустым. Звездный мир должен представлять собой конечный остров в бесконечном океане пространства.

Это представление не очень удовлетворительно само по себе. Оно неудовлетворительно еще и потому, что приводит к следствию, что свет, излучаемый звездами, а также отдаленные звезды звездной системы должны непрерывно удаляться в бесконечность, никогда не возвращаясь и не вступая во взаимодействия с другими объектами природы. Такой мир, материя которого сконцентрирована в конечном пространстве, должен был бы медленно, но систематически опустошаться».

Трудности, рожденные бесконечностью Вселенной, встали и перед Эйнштейном — поначалу столь же неразрешимые. Но выход надо было найти, найти непременно. И Эйнштейн искал — мучительно и напряженно. В работе «Вопросы космологии и общая теория относительности» остались следы этих борений духа — с самим собой, со своими принципами и теми препятствиями, которые громоздила на его пути так непросто устроенная Природа.

Рассматривая возможные выходы из затруднений, Эйнштейн писал: «...я должен признаться, что мне трудно было бы пойти на столь большие уступки в этом принципиальном вопросе. Я решусь на это только тогда, когда все усилия, направленные к тому, чтобы прийти к удовлетворительному представлению о граничных условиях, окажутся бесполезными».

«Усилия оказались бесполезными», и Эйнштейну не оставалось ничего другого, как заключить: «мне не удалось установить граничные условия для пространственной бесконечности».

Но, как мы знаем, когда природа заводила теорию в тупик, Эйнштейн мог «одним ударом разрушить все затруднения — ударом мощного ума, руководимого глубокой интуицией в ощущении физической реальности».

И здесь, в конце концов, последовал такой удар, открывший неожиданный выход:

«Если бы можно было рассматривать мир в его пространственной протяженности как замкнутый, то подобного рода граничные условия были бы вообще не нужны».

Итак, бесконечная Вселенная Ньютона оставила в наследство непреодолимые трудности. Чтобы эти трудности обойти, Эйнштейн предложил рассмотреть иную возможную форму нашей Вселенной — конечную, пространственно-замкнутую. Такую возможность дало и подсказало ему учение Римана:

«...развитие неэвклидовой геометрии привело к осознанию того факта, что можно сомневаться в бесконечности нашего пространства, не вступая в противоречие с законами мышления и с опытом, — писал Эйнштейн, ссылаясь на Римана и Гельмгольца. — ...мыслимы замкнутые пространства, не имеющие границ. Среди них выделяется своей простотой сферическое пространство, все точки которого равноценны. Отсюда перед астрономами и физиками возникает чрезвычайно интересный вопрос: является ли мир, в котором мы живем, бесконечным или же он, подобно сферическому миру, конечен? Наш опыт далеко недостаточен для ответа на этот вопрос. Однако общая теория относительности дает возможность ответить на этот вопрос со значительной достоверностью».

Значит, надо искать теоретические и экспериментальные доказательства правильности — или хотя бы возможности — конечной Вселенной. За разрешение такой задачи и взялся Эйнштейн.

Как уже говорилось, математический аппарат общей теории относительности крайне сложен. Это и понятно. Ведь с его помощью следует описать сложнейшие отношения — между геометрией пространства Вселенной и всей населяющей его материей. Эти отношения называются уравнениями поля тяготения. В них входят, с одной стороны, величины, связанные с кривизной, с метрикой пространства, а с другой — характеристики материи, и прежде всего — ее плотность.

Уравнения поля тяготения, как и любой другой физический закон, вытекают из явлений природы и ими же должны быть подтверждены.

Мы видели, что общая теория относительности выдержала экспериментальную проверку, объяснив отклонение лучей света в поле тяготения Солнца. Объяснила она и некоторые другие «странности» природы, и особенно убедительно — «капризы» в перемещении перигелия Меркурия. Наших знаний, в частности — о распределении плотности тяготеющих масс и движении материи в этом близком нам уголке Вселенной, оказалось достаточно для того, чтобы написать и решить уравнения Эйнштейна — для данных конкретных случаев.

Но как быть со всем необъятным миром, хотя бы с частью его, доступной нашим приборам? Тут возникают колоссальные трудности для составления уравнений поля тяготения. Трудности и чисто математические, и физические — вызванные тем весьма существенным обстоятельством, что нам неизвестно точное распределение плотности вещества в пространстве.

Действительно, чем бо́льшую область окружающей нас Вселенной мы начинаем рассматривать, тем менее точными оказываются наши определения масс звездных скоплений и межзвездной среды. Правда, в таких огромных масштабах речь идет уже не об измерении массы каждого тела в отдельности — здесь нужно установить хотя бы среднюю плотность материи в данном участке Вселенной. Но и это дело крайне трудное.

Никто еще — ни сам Эйнштейн, ни его последователи — не был в состоянии решить задачу во всей ее сложности. На данном этапе, на данном уровне науки это неосуществимо. Но физики и математики знают способы упрощенных и приближенных решений, когда вводятся облегчающие дело предположения и когда пренебрегают чем-то второстепенным.

Таким был и подход Эйнштейна. Во-первых, Эйнштейн предположил, что средняя плотность материи во Вселенной постоянна.

Правомочно ли это? Стоит взглянуть на ночное небо, и невольно начинаешь сомневаться; ведь звезды — сгустки огромной массы, рассеяны в пустом от материи пространстве, отделены друг от друга гигантскими подчас расстояниями. А насколько еще больше расстояния между галактиками! Между скоплениями галактик!

Но все-таки, как это ни покажется странным, Эйнштейн имел право сделать такое предположение, имел право считать среднюю плотность материи постоянной. И вот почему.

Астрономы установили важный факт. Вселенная наша приблизительно равномерно заполнена галактиками, а плотность самих галактик, по-видимому, постоянна. Поэтому если перейти к таким огромным масштабам, то можно считать постоянной среднюю плотность материи в доступной нам части Вселенной.

Не пришли ли мы к противоречию? Сначала утверждали, что острова материи большой массы — звезды —

погружены в пустое пространство, теперь говорим о равномерной средней плотности материи во Вселенной! Как при таком островном распределении масс может быть постоянной средняя плотность?

Но это противоречие только кажущееся. Тут все дело в масштабах явлений.

Возьмем стакан, наполненный водой. У воды будет постоянная плотность: объем стакана равномерно заполнен массой воды. Так ли это? Конечно, так, ответит любой человек. И мы с ним согласимся, если речь будет идти о плотности воды в масштабах стакана. Но если мы уменьшим масштаб в сто миллионов раз и с такой меркой подойдем к плотности вещества в стакане, картина окажется совсем иной. Мы увидим крупинки массы очень большой плотности, отдельные ядра атомов, плавающие, как острова в безбрежном океане пустоты, — ну совсем как звезды в галактике. Где уж тут говорить о постоянной плотности!

Этот пример наглядно показывает, почему в масштабах Вселенной можно полагать постоянной среднюю плотность вещества: звезды во Вселенной подобны атомным ядрам в стакане воды.

Эйнштейн говорил, что если вопрос касается структуры пространства в целом, то мы имеем право представлять себе материю как бы равномерно распределенной по чрезвычайно большим областям пространства. Тут физики поступают как геодезисты, которые поверхность земли уподобляют приближенно эллипсоиду, хотя она имеет на небольших участках крайне сложный вид.

Итак, средняя плотность материи в доступной нам части Вселенной приближенно может рассматриваться как величина постоянная. Она очень мала, но нас интересует сейчас не значение этой плотности, а только ее постоянство.

Если средняя плотность материи постоянна, то, естественно и неизбежно, должна быть постоянной и средняя кривизна пространства.

Вслед за тем Эйнштейн сделал второе предположение: что плотность эта все-таки настолько велика, что кривизна будет положительной.

Мы скоро узнаем, как сильна связь между кривизной пространства и плотностью материи; узнаем, что именно величина плотности определяет геометрию Вселенной, а следовательно, и знак кривизны: если плотность меньше некоего критического значения, кривизна пространства будет отрицательной, если больше — то положительной.

Как раз в самые последние годы к этой проблеме снова приковано внимание ученых, и не случайно. Очень интересные результаты современной астрономии и астрофизики дают богатую пищу для размышлений о нашей Вселенной, о ее структуре, ее прошлом и будущем. Именно теперь пытаются расшифровать и то, что есть, по словам Клиффорда, «Здесь» и «Сейчас», и то, что было «Там» и «Тогда».

Но пока вернемся на полвека назад, к первой космологической работе Эйнштейна. После своих упрощающих предположений Эйнштейн мог заключить:

«Если реальный мир соответствует нашему рассуждению, то теоретическое представление о нем будет следующим. Характер кривизны пространства меняется со временем и местом в зависимости от распределения материи, однако это пространство можно в целом приближенно представить в виде сферического пространства. Во всяком случае, это представление логически лишено противоречий и с точки зрения общей теории относительности является наипростейшим».

Таким образом, мир, по Эйнштейну, представляет собой замкнутое само на себя пространство положительной кривизны.

Но пространство ведь нерасторжимо связано со временем, мы не имеем права отсекать одно от другого.

Эйнштейн и здесь принял определенное допущение. Он предположил, что структура пространства не должна и не будет изменяться с течением времени — какие бы процессы ни протекали во Вселенной.

Это допущение никак не было случайным. Неизменность, стационарность «в большом» нашего мира являлась аксиомой для науки того времени. Она находила себе подтверждение в малых скоростях «неподвижных» звезд, в почти не меняющейся — веками — картине звездного неба.

Допущение это не было упрощающим. Наоборот, мы будем свидетелями, какие непредвиденные трудности и осложнения оно породило.

Но так или иначе, для Эйнштейна оно было обязательным, вернее — естественным; ему, судя по всем его высказываниям, в то время и в голову не приходило, что положение может быть иным.

Итак, строение, кривизна пространства нашего мира неизменны, постоянны во времени. Это значит, что в четырехмерном пространстве-времени или в мире Эйнштейна четвертая координата — время — будет прямой линией.

Если, к примеру, мы захотим изобразить в координатах скорость — время график движения автомобиля с постоянной скоростью, то скорость будет иметь вид прямой линии, идущей параллельно той оси координат, на которой откладывается время.

В мире Эйнштейна такой прямой будет само время, временная координата. Эта прямая бесконечно простирается в обе стороны — в прошлое и будущее, — потому что Эйнштейн, как мы знаем, был убежден: структура Вселенной сегодня та же, что и вчера, завтра — та же, что и сегодня.

Прямая координата времени связана с тремя не прямыми пространственными координатами. Поэтому эйнштейновскую модель мира называют «Цилиндрической Вселенной». Это — четырехмерный мир, для нас непредставимый. Но мы можем представить себе цилиндрическую поверхность, цилиндр, бесконечно простирающийся в обе стороны. Поверхность его имеет постоянную кривизну, а ось будет бесконечной прямой линией. Предположим, что подобна этой оси будет и ось времени в четырехмерном мире Эйнштейна. А вместо цилиндрической поверхности будет трехмерное искривленное пространство. Таким образом, Цилиндрическая Вселенная — это, так сказать, сверхцилиндр, как говорят математики — гиперцилиндр. Ось его будет прямая времени, а три других измерения, соответствующие пространственным координатам, представляют замкнутую гиперповерхность типа сферы.

Вслед за Эйнштейном голландский астроном Виллем де Ситтер предложил свою модель строения Вселенной — «Сферическую Вселенную», в которой координата времени была не прямой, а искривленной — подобно пространственным координатам. Правда, Вселенная де Ситтера требовала нулевой плотности вещества, что, как понимаем мы, существа конечной плотности, не соответствует действительности.

Не следует думать, что те предположения и упрощения, которые ввел Эйнштейн, обеспечили ему легкий путь. Нет, путь был все равно тяжел. Сложности возникали одна за другой.

Сопоставив уравнения поля тяготения с постулатом относительности, Эйнштейн увидел, что «теория относительности не допускает гипотезы о пространственной замкнутости мира», так как из теории следовало, что под действием гравитационных сил замкнутая Вселенная должна сжиматься. Этот противоречащий действительности вывод особенно удручал Эйнштейна. Получалось, что, избавляясь от неприятностей, связанных с бесконечностью Вселенной, он натолкнулся на неприятность, вызванную как раз конечностью, замкнутостью нашего мира.

Чтобы найти выход и из этого затруднения, Эйнштейн был вынужден дополнить свои уравнения еще одним членом, который содержал некую константу — Эйнштейн назвал ее космологической постоянной. Дополнительный член выражал ту силу, которая удерживает звезды на расстоянии друг от друга и, таким образом, препятствует стягиванию Вселенной.

Введение космологического члена и есть та «небольшая модификация» уравнений теории тяготения, о которой предупреждал Эйнштейн в начале своей работы.

Величина космологической постоянной связана с радиусом кривизны трехмерного сферического пространства. И так же, как для радиуса кривизны, существует однозначная связь между нею и количеством материи во Вселенной.

«Итак, вновь введенная универсальная константа λ определяет как среднюю плотность ρ, которая может сохраняться в состоянии равновесия, так и радиус сферического пространства», — писал Эйнштейн.

Нет, «не от хорошей жизни» пошел Эйнштейн на изменение своих уравнений: «Для того, чтобы придти к этому свободному от противоречий представлению, мы должны были все же ввести новое расширение уравнений поля тяготения, не оправдываемое нашими действительными знаниями о тяготении».

Почему пришлось это сделать? Все потому же — для математического сохранения стационарности Вселенной. Потому что в реальной ее, физической стационарности Эйнштейн не сомневался: «Необходимо, однако, отметить, — заканчивает он статью, — что положительная кривизна пространства, обусловленная находящейся в нем материей, получается и в том случае, когда указанный добавочный член не вводится; последний нам необходим для того, чтобы создать возможность квазистатического распределения материи, так как последнее соответствует факту малых звездных скоростей».

Так, с большим трудом преодолевая препятствия, Эйнштейн, наконец, построил модель мира, которая достаточно хорошо отражала мир реальный, Вселенную — в известных тогда науке границах.

Вряд ли жителей нашего земного мира, неустойчивого, раздираемого мировой войной, как-то успокоило известие о том, что все-таки есть на свете нечто незыблемое, вечное, что обитают они в устойчивой, стационарной Вселенной. Это открытие едва ли затронуло их внимание. В те годы физика, да еще такая отвлеченная, интересовала немногих за пределами круга ученых. Не то что сейчас, когда люди поневоле осознали гигантскую роль науки и связывают ее с самим своим существованием. И даже не то, что во времена Коперника и Галилея, когда самые непросвещенные массы почувствовали в новом учении вызов всем темным силам, отравляющим им жизнь.

Однако физики, а вслед за ними и еще какая-то часть ученых приняли этот труд Эйнштейна с благодарностью.

Диалог с Эйнштейном

В 1922 году журнал «Zeitschrift für Physik» опубликовал статью «О кривизне пространства». Автором ее был Александр Фридман из Петрограда — имя это мало что говорило физикам-теоретикам Запада.

Несмотря на неизвестность автора, статья сразу обратила на себя внимание. И не удивительно. В скромном по объему сообщении утверждалось, ни больше ни меньше, следующее. Да, действительно, решая уравнения поля тяготения общей теории относительности, можно получить обе уже известные модели Вселенной: цилиндрический мир Эйнштейна и сферический — де Ситтера. Они, действительно, вытекают из уравнений, если принять все те упрощающие предположения, которые приняли их авторы.

Но решения, дающие обе эти модели, никак не исчерпывают возможностей общей теории относительности. Они отнюдь не единственные и универсальные, а всего лишь возможные частные случаи.

Частные? Значит, есть и более общее решение?

Есть. Его-то и нашел Фридман.

Это общее решение дает «особый мир», «новый тип Вселенной» — Вселенной, меняющейся с течением времени.

Из решения Фридмана с неизбежностью вытекает, что кривизна нашего пространства не остается постоянной. Она должна изменяться.

Как?

Решение открывало две возможности.

Или — монотонное изменение в одном направлении, например, непрерывное расширение Вселенной.

Или — периодическое возрастание и уменьшение кривизны. Во втором случае Вселенная, словно сердце, словно легкие, должна была то сжиматься, то расширяться, как бы пульсировать...

Так стационарная Вселенная утратила свое «монопольное положение».

А сколько усилий пришлось затратить Эйнштейну для создания такой стационарной модели!

Мы уже говорили об этом, но напомним еще раз, и пусть защитой нам послужат слова самого Эйнштейна: «В интересах ясности оказались неизбежными повторения; пришлось отказаться от стремления к изящности изложения; я твердо придерживался рецепта гениального теоретика Л. Больцмана — оставить изящество портным и сапожникам».

Итак, давайте вспомним.

Бесконечная Вселенная Ньютона именно потому, что была бесконечной, несла в себе непреодолимые трудности для математиков и физиков — парадоксы, которые наука была не в силах разрешить.

С «пороками» бесконечности не мог совладать и

Эйнштейн. Тогда он заменил бесконечную «плоскую» ньютонову Вселенную конечной. Конечное пространство по необходимости должно быть замкнутым и искривленным, подобно тому, как обязательно искривлена любая замкнутая поверхность.

Идея искривления пространства находящейся в нем материей нисколько не была вынужденной гипотезой Эйнштейна. Наоборот, это была удивительная находка его, великое открытие — предвосхищенное и теоретически подготовленное создателями неэвклидовой геометрии. И эксперимент впоследствии полностью подтвердил, что материя действительно искривляет пространство.

Далее Эйнштейн предположил, что средняя плотность материи во Вселенной постоянна и настолько велика, что обеспечивает положительную кривизну — другого предположения он сделать и не мог — ведь только при положительной кривизне пространство замкнуто и конечно.

В те годы предположение это не могло быть ни доказано наблюдениями, ни опровергнуто — как, впрочем, и пятьдесят лет спустя, в нынешнем шестьдесят восьмом году. Средняя плотность материи — эта, как мы скоро увидим, решающая для строения Вселенной константа, точно не определена еще и сейчас.

И, наконец, Эйнштейн, исходя из факта малых звездных скоростей, предположил, что Вселенная должна быть стационарной, что ее структура, ее кривизна не должны меняться с течением времени. Но силы тяготения, действующие между всеми массами, заключенными в конечном объеме, будут стремиться стягивать Вселенную в гигантский комок. Чтобы избежать этого, чтобы сохранить стационарность, Эйнштейн и был вынужден ввести космологический член в свои уравнения поля тяготения.

Последний его шаг действительно вынужденный: теория относительности, стройная и совершенная, не требовала присутствия этого члена, не нуждалась в нем. Но в нем нуждался сам Эйнштейн, потому что лишь таким путем он мог спасти, отстоять стационарность Вселенной.

И вот теперь, после такой огромной работы, которая к тому же принесла не одну лишь радость, но и некоторое чувство неуверенности, разочарования, разлада с самим собой (вспомним жалобы Эйнштейна: «мне не удалось», «мне трудно было бы пойти на столь большие уступки», «я решусь на это только тогда, когда все усилия... окажутся бесполезными»), теперь оказывалось, что стационарность Вселенной вовсе не непременна, может быть — даже и не верна.

Нестационарная Вселенная!

Сама мысль о такой возможности прозвучала вызовом физике, устоявшимся, всеми разделяемым представлениям.

За сто лет до того, в Казани Лобачевский публично высказал невероятную и крамольную идею: не исключена возможность, что пространство Вселенной неэвклидово.

Ныне «возмутитель спокойствия» снова явился из России. Снова из загадочной, отрезанной от Запада России.

Не только во времена Лобачевского страна наша была отделена от Европы. Мировая война, потом война гражданская, блокада наглухо, стеной отгородили новую Россию от всего, что находилось за ее пределами, в том числе — и от науки. Наши ученые не знали, что делается за рубежом, западные не имели ни малейшего представления о нас. Контакты оказались разорванными.

Но события, естественно, развивались уже не так, как во времена Лобачевского. Советские физики во главе с Иоффе отчетливо сознавали, что наука по природе своей интернациональна, что жить в изоляции невозможно.

К тому же в нищей, истерзанной войной, голодом, блокадой стране оказалась полностью подорвана и материальная база для научной работы — не было ни книг, ни журналов, ни приборов.

Восстановление нарушенных контактов стало делом первостепенной важности. Для этой цели Ленин, по совету Луначарского, послал за границу Абрама Федоровича Иоффе. Через некоторое время к нему присоединились Алексей Николаевич Крылов и Дмитрий Сергеевич Рождественский. Им дали некоторое — сколько удалось тогда выкроить — количество валюты, главным образом для закупки приборов, и карт-бланш — полную свободу действий. Они должны были сами найти пути и способы для установления связи с учеными Запада, привезти литературу, купить хоть минимально необходимое оборудование для вновь создаваемых институтов. Преодолев всяческие и немалые трудности, наши посланцы справились с задачей. Между Россией и Западом были проложены первые мостки. Изоляция кончилась.

Вот тогда-то русские физики как следует познакомились с общей теорией относительности, и в немецком журнале появилась статья Фридмана. Любопытно, что в том же номере журнала было и обращение к немецким ученым — их просили собрать для России научную литературу.

Голос Лобачевского долгие годы никем не был услышан. Слова Фридмана мгновенно дошли по назначению. И сразу же был напечатан ответ — «Замечание к работе А. Фридмана «О кривизне пространства» — несколько слов текста:

«Результаты относительно нестационарного мира, содержащиеся в упомянутой работе, представляются мне подозрительными».

Далее шло указание на якобы ошибку в вычислениях и вывод, что правильное решение «требует постоянства радиуса мира во времени».

«Замечание» написал не кто иной, как сам Эйнштейн. И не удивительно. Дело касалось общей теории относительности — любимого творения и гордости Эйнштейна.

Помните, как он говорил друзьям:

— Я совершенно не понимаю, почему меня превозносят как создателя теории относительности. Не будь меня, через год это бы сделал Пуанкаре, через два года сделал бы Минковский, в конце концов, больше половины в этом деле принадлежит Лоренцу. Мои заслуги здесь преувеличены. Что же касается теории тяготения, то я почти уверен, что если бы не я, то до сих пор ее никто бы не открыл.

Спустя много лет обычно сдержанный Макс Борн так оценил этот труд Эйнштейна:

— Создание общей теории относительности представлялось мне тогда и представляется сейчас величайшим достижением человеческого мышления в познании природы, поразительным сочетанием философской глубины, физической интуиции и математического искусства.

И в эту святая святых осмелился ворваться молодой, мало известный математик.

Дальше события развивались так.

Фридман устоял перед силой авторитета. Он заново произвел все вычисления и попросил своего товарища, физика Круткова, ехавшего в Берлин, передать их Эйнштейну.

Спустя несколько месяцев в том же журнале появилась еще одна маленькая заметка. Вот она целиком:

«К работе А. Фридмана «О кривизне пространства».

В предыдущей заметке я подверг критике названную выше работу. Однако, моя критика, как я убедился из письма Фридмана, сообщенного мне г-ном Крутковым, основывалась на ошибке в вычислениях. Я считаю результаты г. Фридмана правильными и проливающими новый свет. Оказывается, что уравнения поля допускают наряду со статическими также и динамические (т. е. переменные относительно времени) центрально-симметричные решения для структуры пространства».

Эйнштейн не был бы Эйнштейном, не появись этого публичного признания в своей неправоте.

Александр Александрович Фридман к началу двадцатых годов вовсе не был безвестным начинающим ученым. Просто прежде ему не приходилось заниматься теоретической физикой, область его деятельности была иной. Он по праву считался крупным специалистом-механиком, автором серьезных работ по теоретической метеорологии, динамике атмосферы, и вообще сильным, эрудированным математиком.

Кроме того, Фридман отличался невероятной дотошностью, стремлением и умением глубоко проникать в изучаемый предмет — все равно, был ли он ему знаком, близок или чужд, влезать во все его тонкости, открывать не замеченные другими детали.

Эту особенность Фридмана хорошо изучили его товарищи. Недаром один из них сказал однажды:

— Теперь мы будем наконец знать теорию относительности. Ею заинтересовался Фридман.

Слово «заинтересовался» тут не очень подходит. Общая теория относительности, едва Фридман познакомился с нею, сразу захватила и покорила его.

Это была стихия посильнее всех земных стихий, до той поры занимавших его ум и время. Это была стихия космических масштабов. И стихия смелых, неожиданных представлений. Но она — и в том не было противоречия — подчинялась строгим законам математики.

Фридман был пленен и тем и другим: красотой и смелостью идей и математическим их воплощением.

В вечерние и ночные часы — потому что день был отдан основной работе — переселялся Фридман в этот новый для него мир и со свойственной ему поглощенностью и страстью изучал и осваивал его — одну область за другой.

А изучив досконально, счел себя вправе сказать, что «теория Эйнштейна в своих общих чертах блестяще выдержала экспериментальные испытания», что она «объясняет старые, казавшиеся необъяснимыми явления и предвидит новые поразительные соотношения».

Фридман глубоко поверил в общую теорию относительности и огромные ее возможности. Он писал:

«Вернейший и наиболее глубокий способ изучения, при помощи теории Эйнштейна, геометрии мира и строения нашей Вселенной состоит в применении этой теории ко всему миру и в использовании астрономических исследований».

Нет, Фридман, как мы увидим, не абсолютизировал теорию относительности. Он понимал, что и она есть этап на пути познания, что в ней достаточно схематизма и упрощений, что сложности реального мира неисчерпаемы, и поступательный ход науки неизбежно будет вносить коррективы в любую существующую теорию. Но вместе с тем доверие его к новой теории было столь сильно, что он не побоялся сделать вытекающие из нее выводы, сколь бы странными они ни показались. Даже те выводы, которые не сделал сам Эйнштейн.

Эйнштейн увидел, что между его уравнениями поля и привычной, наблюдаемой картиной мира нет полного соответствия — уравнения не приводят к стационарности Вселенной.

Тогда Эйнштейн изменяет уравнения, добавляет к ним новый член.

Фридман, естественно, тоже увидел это несоответствие. Но он решил исследовать уравнения поля тяготения не только в этом измененном, а и в самом общем виде.

Фридман говорит:

возможно решение неизмененных уравнений поля тяготения;

это решение более общее, более широкое;

в соответствии с ним Вселенная не будет стационарной;

кривизна Вселенной должна меняться с течением времени.

Вот тот вывод, который не сделал Эйнштейн из своей же собственной теории. Можно сказать, что здесь Фридман оказался «святее папы».

Вероятно, именно поэтому Фридману удалось совершить свое открытие. Поэтому он, а не сам Эйнштейн обнаружил — пусть теоретически, «на кончике пера» — такое поистине грандиозное по своим масштабам явление, космических размеров следствие общей теории относительности.

Статья «О кривизне пространства» была как будто бы «побочным ребенком» Фридмана — механика-метеоролога. Но он ко всем своим детям относился с равной ответственностью и любовью.

Интерес к теории относительности не только не был случайным, он не стал и временным. Свидетельство тому — огромный многотомный труд, посвященный учению Эйнштейна, труд, который Фридман задумал и частично успел осуществить вместе со своим товарищем, физиком Всеволодом Константиновичем Фредериксом.

Одновременно со статьей в «Zeitschrift für Physik» в России вышла книжка Фридмана «Мир как пространство и время».

Философский журнал «Мысль» попросил Фридмана рассказать своим читателям о теории относительности Эйнштейна, как специальной, так и общей. По заказу журнала Фридман и написал «Мир как пространство и время».

Быть может, учитывая аудиторию, далеко не всегда стоящую на уровне современной ей науки и вместе с тем чересчур часто претендующую быть в ней и руководителем и верховным судией, Фридман пишет во вступлении:

«Мир, схематическая картина которого создается принципом относительности, есть мир естествоиспытателя, есть совокупность лишь таких объектов, которые могут быть измерены или оценены числами, поэтому этот мир бесконечно у́же и меньше мира-вселенной философа».

Не надо чересчур всерьез относиться к этому «самоуничижению» Фридмана-физика. В этих словах нетрудно уловить и легкую иронию. И дальше, переходя на серьезный тон, давая оценку теории относительности Фридман говорит не без вызова:

«Грандиозный и смелый размах мысли, характеризующий общие концепции и идеи принципа относительности, затрагивающие такие объекты, как пространство и время (правда, измеримое), несомненно, должен произвести известное впечатление, если даже не влияние на развитие идей современных философов, часто стоящих слишком выше «измеримой» Вселенной естествоиспытателя».

И еще раз: «разумеется, что в указанной главе рассматривается не время философов, а скромное «измеримое» время естествоиспытателей».

Хотя работа эта адресована не специалистам, она отнюдь не популярна в привычном значении этого слова. «Популяризация достигается или ценой полного затемнения идей, лежащих в основе принципа относительности, или же, что, пожалуй, еще хуже, ценой извращения этих идей», — замечает Фридман, главная цель которого — донести до читателя идеи теории относительности во всей их чистоте и сложности. В книге его, может, лишь немного поменьше формул или математических выкладок, чем в чисто научной статье. Зато в ней есть такое, чего обычно не бывает, что не разрешают себе авторы в научных статьях: в ней раскрывается, если можно так сказать, лаборатория мысли автора.

Заглянем в эту лабораторию — послушаем рассказ Фридмана о том, как он пришел к идее нестационарности Вселенной.

Помните, Эйнштейн писал, что поведет читателя по дороге, пройденной им самим, дороге несколько непрямой и неровной. Но чтобы идти вслед за Эйнштейном по дороге его мысли, нужно было иное снаряжение, чем есть у нас — требовалось знание теоретической физики. Все же мы попытались хоть слегка познакомиться с «неровной дорогой» Эйнштейна.

Теперь перед нами дорога, по которой можно рискнуть пойти и без столь существенной подготовки. Дорога, на которой отмечены все труднодоступные участки и расставлены специальные указатели, облегчающие путь. Конечно, и при этом она не становится легко проходимой. И теперь требуется труд и напряжение, чтобы преодолеть ее. Сам Фридман ни на минуту не забывает о трудностях и не дает забыть о них читателю. Но не побоимся этого труда.

Итак, в путь.

Первое указание.

Наш физический мир очень сложен. Он отличается большим разнообразием кривизны в различных своих частях. К тому же кривизна эта не постоянна, она меняется с течением времени. Поэтому нужны очень детальные сведения о жизни нашего материального пространства, чтобы все время следить за изменяющимися его геометрическими свойствами, подчеркивает Фридман. К сожалению, мы этих сведений не имеем, а между тем чрезвычайно интересно установить свойства пространства, в котором мы живем и в котором живут и движутся небесные светила. Попытаемся все-таки, пользуясь уже накопленным наукой багажом, насколько возможно, решить вопрос о строении Вселенной.

Второе указание.

Пространство Вселенной надо рассматривать как гиперповерхность, которая соответствует данному значению временно̀й координаты, иными словами — соответствует определенному моменту времени. Объясним, что это значит. Прежде всего вспомним, что термин «гиперповерхность» применяется к геометрическим объектам не двух, как обычные поверхности, измерений, а большего их числа. Поэтому, рассматривая Вселенную как четырехмерный мир пространства-времени, можно сказать, что реальное пространство трех измерений в каждый момент времени есть гиперповерхность, соответствующая этому моменту. Поэтому сначала надо установить геометрические свойства четырехмерного мира пространства-времени, а потом уж рассматривать в этом мире гиперповерхности, отвечающие разным значениям временно́й координаты, и изучать геометрию этих гиперповерхностей. Это и будет геометрия пространства нашей Вселенной.

Как же это сделать? Что для этого надо?

Геометрические свойства Вселенной вполне определятся, отвечает Фридман, коль скоро мы будем знать материю, заполняющую пространство, и ее движение с течением времени. И тут же добавляет, что трудность решения вопроса в общем виде заставляет делать ряд упрощающих предположений.

Друзья и ученики Фридмана вспоминают, что у Александра Александровича было любимое выражение, которое превратилось чуть не в поговорку: «Нельзя ли чего-нибудь откинуть?». Оно означало: нельзя ли откинуть второстепенные детали, которые сильно усложняют решение и в то же время мало влияют на результат?

В данном случае упрощающие предположения касаются главным образом свойств материи.

Вот первое из них: будем считать, что вся заполняющая Вселенную материя состоит из тяготеющих масс. Иными словами, пренебрежем остальными формами материи, например — электромагнитным излучением. Так как подавляющая часть материи сосредоточена в массах — массах звезд, то, приняв это допущение, мы не очень погрешим против истины. И многое выиграем, потому что сможем теперь применить уравнения общей теории относительности. А уравнения эти дают возможность определить метрику мира и другие связанные с ней геометрические свойства его. (Надо сказать, что вопрос этот — в чем сосредоточена основная масса материи, в звездах или в излучении — в нынешние шестидесятые годы приобрел особую остроту. Прежняя уверенность в незначительной роли излучения исчезла. Больше того, может оказаться, что именно различные формы излучения — кванты электромагнитного спектра, главным образом коротковолновой части его, и нейтрино несут в себе большую часть массы Вселенной. Но и такое распределение материи, окажись оно истинным, тоже не мешает применению теории относительности, не находится в противоречии с ней).

Тут как будто бы появляется возможность в принципе решить задачу. Однако очень быстро становится ясно, что радоваться пока рано. Во-первых, принципиальные возможности часто бывают еще очень далеки от своего реального осуществления. А во-вторых, и для принципиального решения недостаточно только посчитать всю материю состоящей из тяготеющих масс. Надо знать еще плотность этих масс и суметь определить мировые линии, по которым массы будут двигаться.

Тут снова непреодолимым частоколом встают математические трудности; они преграждают прямой путь и заставляют искать обходные.

Один из них такой.

Предположим, что нам удалось найти какое-то одно частное решение задачи. Кроме того, предположим, что астрономия дает нам достаточно полные сведения и о распределении звезд во Вселенной, и об их движении.

Тогда, с одной стороны, частное решение уравнений показало бы нам, как распределены в любой момент времени тяготеющие массы в физическом пространстве и каковы их мировые линии, то есть в любой момент времени мы знали бы распределение в физическом пространстве как самих тяготеющих масс, так и их скоростей. С другой стороны, и то и другое распределение — и масс и их скоростей — дает нам и астрономические наблюдения. Сравнив теоретический результат с опытным, мы бы узнали, совпадают они или нет. Иными словами, узнали бы, верно ли наше частное решение, отвечает ли оно строению реальной Вселенной или не отвечает.

Если данное частное решение окажется неверным, то подобным же образом следует испытать другое частное решение.

Перепробовав все частные решения уравнений поля тяготения, говорит Фридман, мы в конце концов нашли бы верное, и тогда с помощью астрономических данных определили бы геометрию мира и жизнь тяготеющих масс, населяющих Вселенную. Но, к сожалению, добавляет он, намеченный идеально правильный путь практически неприменим. С одной стороны, математическое исследование этих уравнений пока не может быть проведено во всей полноте. Задача настолько сложна, что никто не отважился за нее взяться. А с другой стороны, и астрономические данные недостаточны для экспериментальной проверки результатов.

Тот «идеально правильный путь», который предложил Фридман, в нынешний кибернетический век получил широкое распространение. Он называется «методом проб и ошибок». Всем известная механическая мышка, пробующая разные маршруты в поисках выхода из лабиринта, — вот простейшая модель этого метода. Так что некоторые математические сложности подобного решения задачи теперь уже перестали быть непреодолимыми. А тогда, в начале двадцатых годов, такой путь решения был, конечно, неосуществим. Даже трудно сказать, сколько человеческих жизней понадобилось бы, чтобы на бумаге просчитать все гигантское количество возможных частных решений.

Но и в кибернетическую машину надо заложить точную информацию — в данном случае информацию о величине и распределении плотности тяготеющих масс во Вселенной. Эту информацию в удовлетворительной степени астрономия не может дать и сейчас.

Вернемся к Фридману. Убедившись в том, что «идеально правильный путь» не ведет к цели, Фридман предлагает искать другую дорогу — принимать гипотезы, сводящие уравнения поля тяготения к более простым уравнениям, и выводить некоторые следствия из уже известных данных о строении Вселенной. И тогда эти вот простые следствия можно будет сравнивать с результатами астрономических наблюдений.

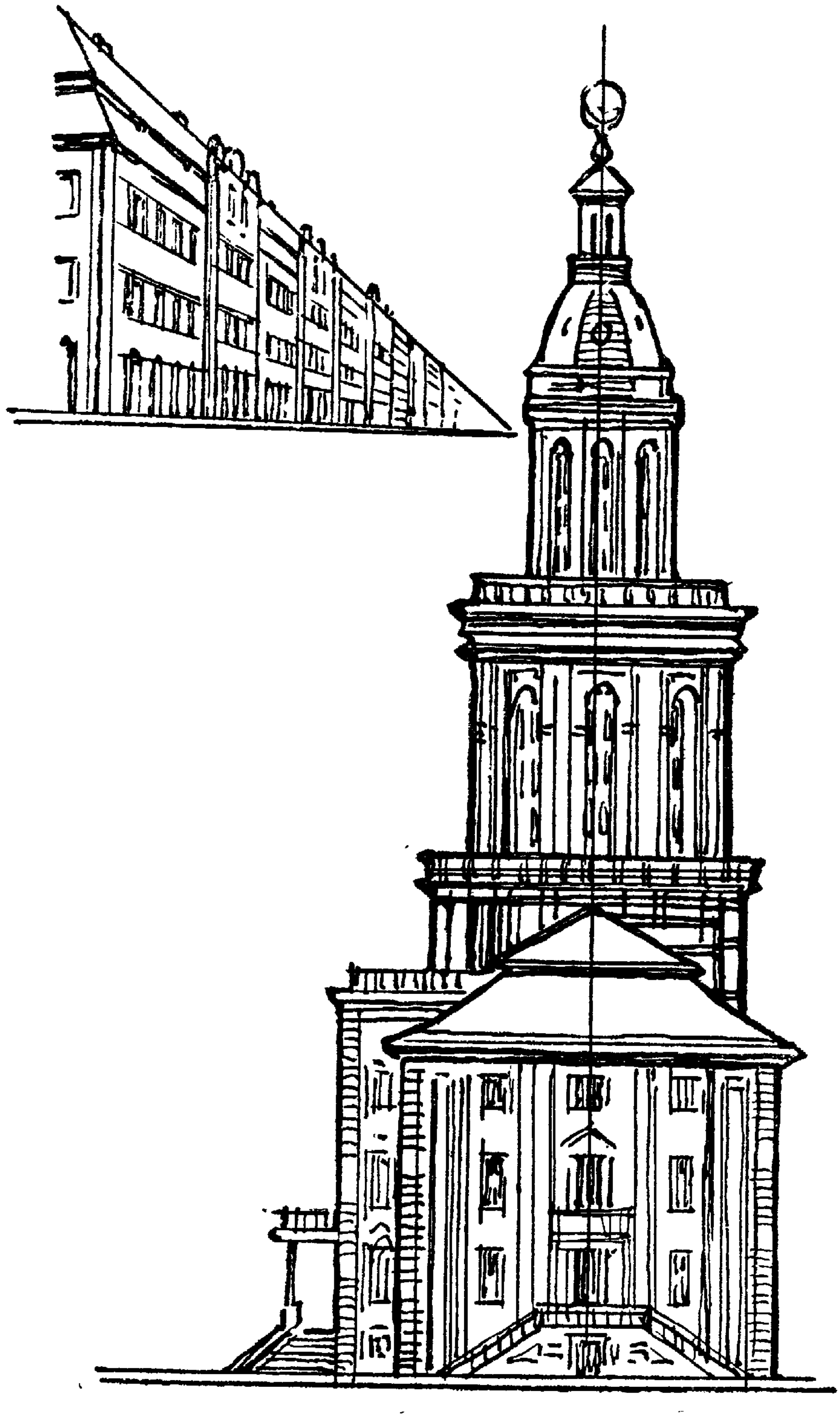
Фридман — скептик. Он не строит никаких иллюзий, не принимает желаемое за сущее. Он даже недооценил возможности науки, быстроту ее продвижения, когда с печальной категоричностью заключил:

«Основываясь на сказанном, следует считать изучение Вселенной в целом в настоящее время в самой младенческой стадии развития; ко всем без исключения выводам, вытекающим из изучения Вселенной, дóлжно в настоящее время относиться с полным недоверием; это недоверие к тому же подкрепляется крайней шаткостью и ненадежностью наших астрономических сведений о Вселенной».

Малоутешительный итог...

Но, может быть, слова эти не надо понимать так буквально. Может, главное в них — не пессимизм, а предостережение против зазнайства. Потому что после

Александр Александрович Фридман.



Ленинград.
Университет. Кунсткамера.

этих слов Фридман-ученый сразу же принимается за работу. Он снова думает и ищет.

И нащупывает правильный путь.

Итак, какие же упрощения надо делать дальше, чтобы получить хоть самое приближенное решение задачи?

Новые упрощающие предположения касаются двух главных партнеров игры — тяготеющих масс и геометрии мира.

Первое. Тяготеющие массы считаются неподвижными; считается, что скорости их друг относительно друга равны нулю. С первого взгляда это предположение кажется явно абсурдным, говорит Фридман. Действительно, мы знаем, что звезды, даже те, что названы «неподвижными», находятся в постоянном движении. Но все-таки неподвижными их называют недаром. Наблюдения показывают, что скорости их в большинстве случаев ничтожно малы по сравнению со скоростью света. Значит, первое предположение оказывается вовсе не абсурдом. И уравнения поля тяготения можно с большой точностью привести к такому виду, в котором скорости масс равны нулю.

С массами покончено, говорит Фридман. Можно не делать никаких дополнительных предположений об их плотности.

Эти рассуждения о свойствах тяготеющей материи очень важны и интересны. Мы сейчас к ним вернемся. Но сперва — о втором предположении, касающемся геометрии мира. Здесь сказано коротко и ясно:

«Предполагается, что геометрия мира обладает свойством давать пространства (гиперповерхности), в которых кривизна в любой их точке одинакова и меняется лишь с течением времени».

Так просто, как о само собой разумеющемся, говорит Фридман о кривизне, которая меняется с течением времени!

Так приходит он к выводу: Вселенная может быть нестационарной.

Прежде чем рассказать об этом финише фридмановского пути, возвратимся к первому предположению — о материи.

Вспомним, Эйнштейн тоже делал упор на то, что материю приближенно следует считать покоящейся: «Самое важное из всего известного нам из опыта о распределении материи заключается в том, — писал он, — что относительные скорости звезд очень малы по сравнению со скоростью света. Поэтому... материя может быть рассматриваема как пребывающая в течение продолжительного времени в покое». То есть Эйнштейн считал, что такой подход довольно точно соответствует истинному положению вещей и прежде всего — стационарности Вселенной.

Фридману то же предположение о «малоподвижных» звездах не помешало обнаружить «подвижную» Вселенную.

Тогда зачем же он, вслед за Эйнштейном, подчеркнул, что принимает массы покоящимися друг относительно друга? Такое предположение, не говоря о его физической разумности и законности, устранило большую математическую трудность в решении уравнений поля тяготения. Для относительно неподвижной материи можно в неделимом «мире», в неделимом «пространстве-времени» отделить пространственные координаты от временной и рассматривать строение физического трехмерного пространства в каждый данный момент времени.

Эйнштейн ввел еще одно упрощающее предположение о материи. Он принял, что в среднем она распределена во Вселенной равномерно. Именно равномерная плотность обеспечивает постоянную кривизну пространства.

Фридман такое условие нигде не оговаривает. Но, с другой стороны, когда он пишет, что «кривизна в любой точке одинакова и меняется лишь с течением времени», то в этих словах неявно, как говорят математики, содержится признание равномерного распределения материи. Неравномерная плотность неизбежно привела бы к неодинаковой кривизне пространства в разных областях Вселенной.

Итак, две предпосылки.

Первая (ее принимают и Эйнштейн и Фридман): материя во Вселенной находится в относительном покое и средняя плотность ее всюду одинакова. Из одной этой предпосылки следует, что средняя кривизна пространства постоянна и неизменна — в с ю д у и в с е г д а.

Но Фридман делает и второе предположение: средняя кривизна пространства постоянна — всюду, но не всегда; она может меняться с течением времени.

Когда к фундаменту — уравнениям поля тяготения — добавлены эти два последних камня, Фридман берется за работу зодчего. Он конструирует здания Вселенной — одно, другое, третье... — все те, что можно возвести на этом фундаменте.

«Сделав указанные предположения, можно прийти прежде всего к двум типам Вселенной: 1) стационарный тип — кривизна пространства не меняется с течением времени и 2) переменный тип — кривизна меняется с течением времени. Стационарный тип дает всего лишь два случая Вселенной, которые были рассмотрены Эйнштейном и де Ситтером.

Переменный тип Вселенной представляет большое разнообразие случаев: для этого типа возможны случаи, когда радиус кривизны мира, начиная с некоторого значения, постоянно возрастает с течением времени; возможны далее случаи, когда радиус кривизны меняется периодически: Вселенная сжимается в точку (в ничто), затем, снова из точки, доводит радиус свой до некоторого значения, далее опять, уменьшая радиус своей кривизны, обращается в точку и т. д.».

Какой же тип соответствует реальной Вселенной?

С уверенностью можно сказать — в точности не соответствует ни один. Как бы ни были сложны и остроумны эти конструкции, Вселенная наша невообразимо сложнее их всех.

«В XX веке, — сказал Фридман, — человек попытался снова, на основании тех сведений о мире, которые естествознание ко времени нашей эпохи накопило, создать общую картину мира, правда, мира чрезвычайно схематизированного и упрощенного, напоминающего настоящий мир лишь постольку, поскольку тусклое отражение в зеркале схематического рисунка Кельнского собора может напомнить нам сам собор».

Тогда можно спросить — какой же тип более всего походит на реальность, стоит к ней ближе всего?

Мы уже говорили, что Фридман — скептик: «Все это пока до́лжно рассматривать как курьезные факты, не могущие быть солидно подтверждены недостаточным астрономическим материалом; бесполезно, за отсутствием надежных астрономических данных, приводить какие-либо цифры, характеризующие «жизнь» переменной Вселенной».

Бесполезно, да, а все равно интересно... А может, как настоящий ученый, он должен довести работу до конца?

Так или иначе, но «если все же начать подсчитывать, ради курьеза, время, прошедшее от момента, когда Вселенная создавалась из точки до теперешнего ее состояния, начать определять, следовательно, время, прошедшее от сотворения мира, то получатся числа в десятки миллиардов наших обычных лет». Давайте запомним это полученное «ради курьеза» число.

Итак, ответа нет. Пока нет. «Пока этот метод немногое может дать нам, ибо математический анализ складывает свое оружие перед трудностями вопроса, а астрономические исследования не дают еще достаточно надежной базы для экспериментального изучения нашей Вселенной. Но в этих обстоятельствах нельзя не видеть лишь затруднений временных; наши потомки, без сомнения, узнают характер Вселенной, в которой мы обречены жить... И все же думается, что

Измерить океан глубокий,
Сочесть пески, лучи планет,
Хотя и мог бы ум высокий —
Тебе числа и меры нет!»

Так кончается книжка «Мир как пространство и время».

Прошло три года. Совсем молодым, тридцатисемилетним, Фридман умирает от брюшного тифа.

Он не дождался того открытия, которое стало его триумфом. И не ожидал его. Потому что не представлял, как быстро наука о Вселенной выйдет из «младенческой стадии развития». Какими шагами пойдет вперед.

...Ровесник Фридмана, американский астроном Эдвин Хаббл был увлечен больше всего изучением туманностей. Им он посвятил всю свою жизнь и работы его увенчались рядом великолепных открытий.

Хаббл применял самую современную и совершенную технику. Телескопы, с которыми он вел наблюдения, всякий раз были наибольшими из существующих. Он одним из первых начал фотографировать туманности и исследовал их спектры.

Хаббл доказал, что большинство туманностей — а число их ныне измеряется миллиардами — спиральные, эллиптические и другие лежат вне нашей звездной системы, вне Галактики; они рассеяны по всей необъятной Вселенной. Доказал, что туманности эти вовсе не сгустки космической пыли; они состоят из звезд — они есть сложнейшие звездные системы. Некоторые из них структурно сходны с нашей Галактикой, другие имеют отличное от Галактики строение. Все вместе подтверждает, что Вселенная устроена сложно, что она подобна многоязычному миру, где в каждой группе, в каждой разновидности царят свои законы.

Эдвин Хаббл решил привести в систему все многообразие туманностей. Более тридцати лет он разрабатывал классификацию галактик и закончил ее в 1953 году, за несколько месяцев до смерти.

Ныне классификация галактик уточнена и расширена. Ныне известно, что галактики еще не самые сложные образования. Существуют еще скопления галактик — мы об этом уже говорили. Если в галактиках содержатся миллиарды звезд, то даже трудно себе вообразить, сколь сложная система — скопление галактик. А между тем в некоторых процессах, протекающих во Вселенной, в некоторых видах движения она ведет себя как единое целое.

Исследуя в обсерватории Маунт Вильсон спектры света, приходящего к нам от далеких галактик, Хаббл заинтересовался загадочным в то время явлением. Спектры туманностей были безусловно известными. Они принадлежали водороду, гелию и другим нашим «земным» элементам. Но, странное дело, все линии спектров были чуть смещены к красному концу.

Еще более поразительным показалось то, что для разных галактик смещение было различным — для одних бо́льшим, для других меньшим. Оказалось, что здесь царит странная закономерность: величина красного смещения пропорциональна расстоянию от Земли до галактики; чем дальше от нас туманность, тем больше смещение.

К 1929 году накопилось достаточно материала, безотказно подтверждающего красное смещение, и Хаббл опубликовал свое открытие: красное смещение присутствует в спектрах всех галактик; величина его пропорциональна расстоянию от нас до галактики. Другими словами, чем дальше от нас находится галактика, тем больше все линии спектра смещены к красному концу — это и есть закон Хаббла. Открытие американского ученого взбудоражило и физиков и астрономов. Начались лихорадочные поиски объяснения столь странного феномена.

Из немногих возможных причин наиболее убедительной представлялся доплер-эффект.

...Вообразите, что вы стоите у полотна железной дороги на глухом полустанке, мимо которого, не останавливаясь, проходят поезда. Вслушайтесь в предупреждающие гудки паровоза. Пока поезд приближается к вам, тон гудка все время высокий, но едва только паровоз пронесется мимо, как гудок станет сразу низким и на басовых нотах замрет вдали.

Это явление называется эффектом Доплера.

Когда тело приближается, волны издаваемого им звука как бы набегают друг на друга и сокращаются. Звук кажется более высоким. Когда тело удаляется, волны как бы растягиваются. Звук становится более низким.

Доплер-эффект наблюдается и при движении тел, излучающих свет. Приближение тела не изменяет скорости света, она остается постоянной. Но изменяется длина волны или обратная ей величина — частота. Длина волны становится короче, частота — выше. Происходит смещение к коротковолновому, фиолетовому концу спектра. Удаление тела подобным же образом вызывает увеличение длины волны, уменьшение частоты и смещение ее к красному концу спектра.

Среди американских физиков ходил анекдот об их знаменитом коллеге Роберте Вуде. Однажды Вуд, мчась на своей машине, проехал на красный свет. Его остановили и, естественно, подвергли штрафу. Невинно глядя в глаза полицейскому, Вуд объяснил: он ехал с такой скоростью, что, по принципу Доплера, красный свет стал для него зеленым. Штраф отменили. К сожалению, рядом оказался ученик Вуда, накануне «засыпавшийся» у него на экзамене. Ученик быстренько сосчитал, с какой скоростью должен был ехать Вуд, чтобы красный свет показался ему зеленым. Услыхав фантастическую цифру, полицейский не моргнул и глазом, но, не растерявшись, приговорил Вуда к штрафу — теперь уже за превышение скорости.

Итак, каждая спектральная линия соответствует определенной длине световой волны. Смещение спектральных линий в спектрах галактик к красному концу указывает на удлинение волн.

А удлинение волн, о чем говорит оно?

Объекты — далекие галактики — удаляются от нас. Чем дальше находится галактика, тем с большей скоростью совершает она свое «бегство». Скорости самых отдаленных галактик соизмеримы уже со скоростью света.

Не все ученые и не сразу приняли такое объяснение. Но попытки найти иные причины красного смещения, например, приписать его «усталости», «старению» квантов света на долгом пути, оказались несостоятельными.

Так что же все это в конце концов означает?

Куда, почему, от кого бегут галактики?

И тут вспомнили работу Александра Фридмана «О кривизне пространства».

Расширяющаяся Вселенная...

В маленькой работе было предсказано самое грандиозное из существующих в природе явлений. Теперь оно подтвердилось.

Бельгийский ученый Леметр развил теорию расширяющейся Вселенной и предложил собственную модель мира. Теперь, неожиданно, модель Леметра привлекла внимание физиков и астрономов. Но об этом потом.

Итак, наблюдения неопровержимо доказали: Вселенная не стационарна, не стабильна, не устойчива. Она расширяется. Значит, с течением времени меняется и ее геометрия, уменьшается кривизна пространства.

Сразу же напрашиваются два вопроса, причем один довольно каверзный.

Как физически происходит расширение Вселенной?

Если скорости удаления галактик соизмеримы со скоростью света, то как быть с предположением о малых скоростях звезд друг относительно друга; остается ли оно правомерным?

Оказывается, ответ на первый вопрос содержит в себе ответ и на второй.

Расширение Вселенной есть процесс такого масштаба, что он практически не затрагивает структуру галактик, а значит — взаимные расстояния и скорости обитающих в них звезд. Больше того, оно не затрагивает даже структуру скоплений галактик — куда более мощных образований, чем сами галактики. Скопление галактик — это, грубо говоря, совместно движущееся благодаря тяготению объединение галактик, подобно тому, как галактика — совместно движущееся объединение звезд. При расширении Вселенной изменяются расстояния, по-видимому, лишь между скоплениями галактик.

Вот хорошая иллюстрация к расширению Вселенной из книги американского физика Гарднера:

«Представьте себе гигантский ком теста, в который вкраплено несколько сот изюмин. Каждая изюмина представляет собой скопление галактик. Если это тесто сажают в печь, оно расширяется равномерно по всем направлениям, но размеры изюмин остаются прежними. Увеличивается расстояние между изюминами. Ни одна из изюмин не может быть названа центром расширения. С точки зрения любой отдельной изюмины все остальные изюмины кажутся удаляющимися от нее. Чем больше расстояние до изюмины, тем больше кажется скорость ее удаления».

Поскольку «сидение в печи» никак не отражается на изюминах — скоплениях галактик, остается в силе упрощающее предположение Эйнштейна и Фридмана — считать каждую из звезд пребывающей в покое относительно других, ближайших к ней звезд.

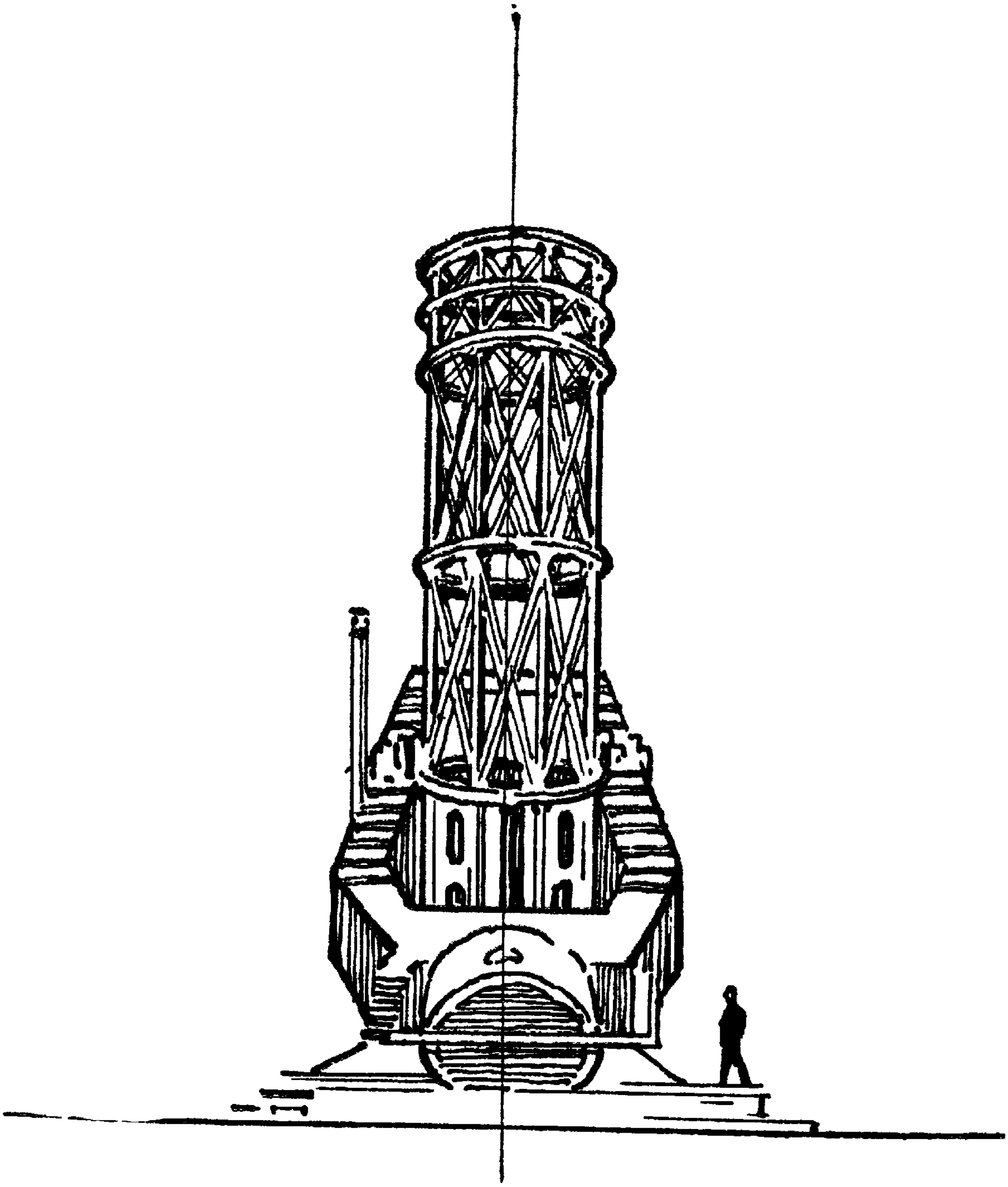
Итак, открытие Фридмана неожиданно для всех получило блистательное подтверждение в самом крупном по масштабам процессе, разыгрывающемся во Вселенной.

Это был триумф не только Фридмана, но и общей теории относительности, а значит, и Эйнштейна, хотя связан он был как раз с отказом от эйнштейновской стационарной Вселенной.

И Эйнштейн принял этот отказ, может быть, даже с чувством облегчения. Вот что писал он спустя два года после открытия Хаббла:

«Наши знания о структуре пространства в больших областях («космологическая проблема») получили важ-

Эдвин Пауэлл Хаббл.



Телескоп обсерватории Маунт-Вильсон.

ное развитие. Раньше мы рассуждали, основываясь на следующих двух предположениях.

1. Существует некоторая средняя плотность материи во всем пространстве, которая всюду одна и та же и отлична от нуля.

2. Размеры («радиус») пространства не зависят от времени.

Оба эти предположения могут быть согласованы с общей теорией относительности лишь после добавления в уравнения поля гипотетического члена, который не следует из теории и не представляется естественным с теоретической точки зрения («космологический член в уравнениях гравитационного поля»).

В то время предположение (2) представлялось мне неизбежным, поскольку я считал, что в случае отказа от него открываются безграничные возможности для всевозможных спекуляций.

Однако уже в двадцатых годах русский математик Фридман показал, что с чисто теоретической точки зрения более естественным является иное предположение. Он показал, что, опуская предположение (2), можно сохранить предположение (1), не вводя довольно неестественный космологический член в уравнения гравитационного поля. Именно первоначальные уравнения поля допускают решение, в котором «радиус мира» зависит от времени (расширяющееся пространство). В этом смысле, согласно Фридману, можно сказать, что теория требует расширения пространства.

Несколькими годами позже Хаббл в специальных исследованиях внегалактических туманностей показал, что спектральные линии обнаруживают красное смещение, которое непрерывно возрастает с увеличением расстояния до туманности. В соответствии с нашими современными знаниями это можно интерпретировать только в смысле принципа Доплера как всестороннее расширение системы звезд, требуемое, согласно Фридману, уравнениями гравитационного поля.»

Эта длинная цитата теперь уже не нова для нас по содержанию, но важно то, что все это сказал сам Эйнштейн. В другой раз он повторил свою оценку открытия Фридмана:

«Его результат затем получил неожиданное подтверждение в открытом Хабблом расширении звездной системы (красное смещение спектральных линий, которое растет с расстоянием). Не вызывает поэтому никаких сомнений, что схема Фридмана — это наиболее общая схема, дающая решение космологической проблемы».

Как следует из работы Фридмана, расширяющаяся Вселенная не нуждается для своего описания в том добавочном космологическом члене, который вынужденно пришлось ввести Эйнштейну.

— Он сам говорил нам о том, — вспоминал один из физиков,— как он чувствовал себя несчастным, когда теория относительности предсказала, что мир конечной плотности должен иметь изменяющийся размер; как он изобрел искусственный член с «космологической постоянной», чтобы скомпенсировать это «неразумное» изменение размера; о последующем открытии, что мир действительно расширяется; и о его заключении, что космологический член с самого начала не следовало бы вводить; о том, что к выводам простой, последовательно развиваемой теории следует относиться серьезно.

Эйнштейну принадлежит крылатое ныне изречение, что история науки — драма, драма идей. Здесь нет преувеличения. Один из величайших гениев человечества слишком хорошо познал эту истину на всем опыте своего творчества. Но, как ни странно, космологическая постоянная не ушла со сцены навсегда.

Среди части физиков бытует мнение, что Фридман сам не очень верил в созданную им теорию расширяющейся Вселенной. Будто бы он говорил, что его дело — математика, уравнения, а физики пусть разбираются, какие из решений соответствуют действительности.

«Вступаясь» за Фридмана, Петр Леонидович Капица сказал, что «это ироническое высказывание о своих трудах остроумного человека не может изменить нашу высокую оценку его открытия». Дирак, напоминает Капица, тоже не верил в реальное существование предсказанного им теоретически позитрона. «Но позитрон был открыт, и Дирак, сам того не предполагая, оказался пророком. Никто не пытается преуменьшить его вклад в науку из-за того, что он сам не верил в свое пророчество.»

На рубеже тридцатых годов выдающийся английский физик Поль Дирак, тогда еще совсем молодой, разрабатывая релятивистскую — с учетом принципа относительности — теорию движения электрона, пришел к поразительному результату. Поразительному и для него самого и для всех окружающих: из уравнений следовало, что помимо электрона должна существовать его античастица, то есть частица с той же массой, что и у электрона, но с положительным зарядом. Никаких экспериментов в пользу такого результата не было.

Дирак попытался было отождествлять свою частицу с протоном, но потом отказался от этой мысли — ведь масса протона в 1800 раз больше массы таинственного «антиэлектрона». Дирак не настаивал, что антиэлектрон существует в природе, даже не предполагал этого, тем не менее он чисто теоретически предсказал, как должна была бы вести себя эта гипотетическая частица. В расчете была даже указана неизбежность аннигиляции при встрече ее с электроном, то есть превращения массы этих двух частиц в энергию излучения.

Вскоре, изучая космические лучи, американский физик Андерсон обнаружил такие частицы со всеми предсказанными Дираком свойствами. Их назвали позитронами. Они были первыми из растущего сейчас семейства античастиц.

Так обстояло дело с Дираком, так он, по словам Капицы, «сам того не предполагая, оказался пророком».

А Фридман, верил ли он в свое открытие?

Он, безусловно, верил в математическую правильность решения и доказал ее. Но счесть его «чистым математиком», не размышляющим над физическим содержанием открытия, конечно, совершенно неправильно.

Вопросы «общего устройства нашей (само собой разумеется, материальной) Вселенной» глубоко занимали его. Недаром он писал:

«Как бы ни были шатки наши соображения, касающиеся этой области, но обширность задачи заставляет отнестись к ним с необычайным интересом».

И еще: «Вернейший и наиболее глубокий способ изучения, при помощи теории Эйнштейна, геометрии мира и строения нашей Вселенной состоит в применении этой теории ко всему миру и в использовании астрономических исследований».

Разве такое может сказать математик, лишь бесстрастно решающий уравнения?!

Об этом свидетельствует один из друзей Фридмана:

«А. А. Фридман имел редкие способности к математике, однако изучение одного только математического мира чисел, пространства и функциональных в них соотношений не удовлетворяло его. Ему было мало и того мира, который изучается теоретической и математической физикой. Его идеалом было наблюдать реальный мир и создавать математический аппарат, который позволил бы формулировать с должной общностью и глубиной законы физики, а затем, уже без наблюдений, предсказывать новые законы.»

И жена Фридмана, человек, который имел доступ в труднодоступный внутренний мир его, вспоминает:

«Для него наука и работа были дороже жизни, которую он сжигал во имя идеи и глубокой веры в будущие достижения человеческого разума. Мечта о возможности снестись когда-нибудь с иными мирами, когда человечество сумеет преодолеть силу тяготения, казалась ему осуществимой в недалеком будущем».

Вся жизнь Фридмана — смелая, деятельная, с вечным стремлением прорваться вперед, в неизведанное — так не согласуется с образом погруженного лишь в уравнения математика.

Екатерина Петровна Фридман писала про мужа:

«Целый вихрь идей захватывал его с неудержимой силой, и если жажда познания приносила ему и радость и мучение, то творчество было жестоким кумиром, даровавшим ему и великое счастье и глубокую внутреннюю муку, тоску о недоступном.

Он сознавал, что в своем творчестве идет новыми путями, трудными, никем еще не исследованными, и любил приводить слова Данте: «Вод, в которые я вступаю, не пересекал еще никто».

Но великая радость, которую дает творчество, гордость духа от сознания сил своих и намеченных открытий, слишком часто сменялась отчаянием, муками сомнения и неудовлетворенностью своей работой. Вечное стремление создать большее, найти новое, невозможность одолеть препятствия, сознание одиночества и слабости сил человеческих — вот что создает из истинного ученого «мученика науки».

О том же и почти теми же словами говорил и Эйнштейн:

«В свете уже достигнутого знания то, что счастливо добыто, кажется почти тривиальным... Но ведущийся ощупью, годами длящийся поиск в темноте с его напряженным ожиданием, со сменой уверенности и отчаяния и бесконечными прорывами к ясности — все это знает лишь тот, кто сам пережил это».

Здесь, в этих словах, может быть, и лежит ответ. Скорее всего, Фридман боялся до конца поверить в свое открытие, боялся утверждать наверняка. Ведь этих «вод не пересекал еще никто». Он, конечно, думал, не мог не думать о связи своей теории с действительным строением мира. В его расчетах не случайно появилась цифра «жизни Вселенной» — как мы скоро увидим, так близко совпадающая с нынешними данными. Но он с пристрастием оценивал возможности космологии своего времени, боялся переоценить их, когда говорил, что космология находится «в самой младенческой стадии развития».

Теперь мы знаем, что возможности эти он все-таки сильно недооценил. Не оборвись так рано его жизнь, проживи он еще хотя бы четыре года, каким счастьем стало бы для него открытие Хаббла.

Так что все противится мысли, что расширяющуюся Вселенную Фридман открыл случайно, занимаясь некими математическими упражнениями.

Но, может быть, верно другое. Что главное дело своей жизни — потому что теория расширяющейся Вселенной стала главным его вкладом в большую науку — Фридман сделал, так сказать, между делом. Основным занятием его, основным приложением сил была теоретическая метеорология, механика атмосферы.

Но теория Эйнштейна не переставала притягивать к себе Фридмана. Он чувствовал, что в ней таится еще много нераскрытых возможностей; чувствовал, потому что «его творческая мысль проникала во все закоулки накопленных им знаний и освещала их ярким светом его дисциплинированного ума и творческой фантазии».— Такова была особенность его дарования, или его характера, или того и другого.

В 1924 году, в последние месяцы жизни Фридман снова вернулся к общей теории относительности. Новая его работа называлась «О возможности мира с постоянной отрицательной кривизной пространства».

Что же на этот раз толкнуло Фридмана на такой шаг? Почему он решил заново разобраться в уравнениях поля тяготения, еще раз проанализировать их?

Вряд ли причиной послужили какие-нибудь новые идеи о строении Вселенной — в науке за эти два года никакого переворота, никаких открытий, потребовавших пересмотра идей, не произошло.

Дело, наверное, в том, что истинный исследователь должен пройти весь путь до конца, найти и изучить все возможности, не обойти вниманием своим ни одного варианта, представляется ли он реальным или непостижимо странным. Не упустить ничего!

Мысль эта может найти подтверждение и в названии работы, и в первых строках ее.

Фридман пишет: «В заметке «О кривизне пространства» мы рассмотрели те решения космологических уравнений Эйнштейна, которые приводят к типам мира, обладающим в качестве общего признака постоянной положительной кривизной; при этом мы обсудили все возможные случаи. Однако возможность получить из космологических уравнений мир постоянной положительной кривизны находится в тесной связи с вопросом о конечности пространства».

Теперь Фридман ставит вопрос — можно ли получить из тех же уравнений Эйнштейна «мир с постоянной отрицательной кривизной, о конечности которого едва ли можно говорить». И отвечает: да, в уравнениях Эйнштейна заключена возможность и такой Вселенной — бесконечной, с постоянной отрицательной кривизной.

И на этот раз исследование уравнений поля тяготения Фридман провел точно по такой же схеме, что и в предыдущей работе. Но в результатах полной аналогии не получилось.

Помните, Вселенная положительной кривизны могла быть или стационарной — по Эйнштейну, или расширяющейся.

Вселенная отрицательной кривизны стационарной быть не могла. Точнее — она могла бы быть стационарной только в том случае, если бы плотность материи в ней оказалась отрицательной или равной нулю. Первое просто физически бессмысленно, а второе, как мы знаем, не соответствует действительности. Как ни мала средняя плотность вещества во Вселенной, она, конечно, отлична от нуля. Звезды, галактики, космическая пыль, да и мы с вами — все это материя, все это имеет плотность.

Через сто лет после того, как Лобачевский предположил, что может существовать пространство отрицательной кривизны, Фридман подтвердил такую возможность.

Нестационарность пространства отрицательной кривизны должна была смущать Фридмана не больше, чем нестационарность замкнутого пространства положительной кривизны. В 1924 году все было так же, как и в 1922. Тот и другой вариант приходилось рассматривать всего лишь как прогноз.

Но наступил двадцать девятый год. Телескоп и спектрографы Хаббла сказали свое слово, и расширяющаяся Вселенная стала реальностью. На какую же чашу весов легло открытие Хаббла? На обе. Больше того, расширение пространства, одинаково возможное и при положительной и при отрицательной его кривизне, в какой-то степени даже затрудняет сделать выбор.

Выбор не сделан и по сей день. Но именно сейчас деятельное внимание ученых снова обратилось к величайшей космологической проблеме — выяснению геометрии Вселенной, ее развития и ее прошлого.

Так закончился диалог Фридмана с Эйнштейном. В выигрыше, естественно, оказалась наука. Физики оценили выигрыш сполна, Фридман даже не успел узнать о нем.

Александр Фридман

Даже такая чисто теоретическая, отвлеченная работа Фридмана, которой мы слегка коснулись, открыла нам не только выдающегося ученого, но и незаурядного человека.

Давайте немножко ближе познакомимся с Фридманом-человеком.

Янош Бояи делил себя между двумя привязанностями — математикой и музыкой. Фридман поделил эти привязанности: одну взял себе, другую оставил родным.

Его отец, Александр Фридман, и дед по материнской линии чех Игнатий Воячек, оба были музыканты и композиторы. Мать преподавала игру на фортепиано.

То ли действительно Александр Фридман-младший не унаследовал, как сам он говорил, родительского дарования, то ли интересы его с самых ранних лет были направлены на другое. Другим, как не трудно догадаться, стала математика.

Наказания бывают разные. Родные изобрели для маленького Саши очень жестокое — за провинности ему запрещалось заниматься математикой. По-видимому, наказания эти не сходили для него легко; они запомнились на всю жизнь, он даже рассказывал о них жене.

Екатерина Петровна Фридман уже после смерти мужа вспоминала: «Математика была как-то органически соединена с ним. В детстве для него было придумано самое строгое наказание, усмирявшее его непокорный нрав: его оставляли без уроков арифметики».

Еще одно наказание он тоже запомнил — на этот раз пострадал он как раз за математику. Два гимназиста, Фридман и товарищ его Тамаркин, написали совместное исследование о числах Бернулли и послали его за границу, в научный журнал. Вскоре пришел ответ с комплиментами и сообщением, что работа будет напечатана. Взрыв бурного восторга произошел прямо на уроке. Гимназическое начальство не сочло повод уважительным или не пожелало в нем разобраться, и оба «именинника» были выгнаны из класса. А в 1905 году работа действительно появилась в авторитетнейших «Анналах математики», которые издавали Клейн и Гильберт.

В биографии Фридмана, этого глубокого мыслителя, тонкого теоретика много экзотичного. Вот кто никогда не был тихим кабинетным ученым — хотя иногда ему этого очень хотелось. Может потому, что время было уж очень не тихое. Сознательная жизнь Фридмана, двадцать лет из тридцати семи, пришлась на годы от 1905 до 1925. Сколько бурь они вместили... А Фридмана словно притягивали к себе все бури — и в природе и в жизни.

Так получилось, что Саша Фридман довольно долго воспитывался у родственников своего отца — у деда, Александра Фридмана, лекаря Преображенского полка, и у тетки. В годы первой революции эта семья жила в Зимнем дворце. Конечно, трудно было найти лучшее место, чтобы писать листовки с призывами свергнуть самодержавие. Дед и тетка, естественно, не поощряли такого занятия и держали племянника взаперти. Тогда товарищ Фридмана, впоследствии тоже крупный математик, академик Владимир Иванович Смирнов, взял на себя роль распространителя «крамолы».

Относительно спокойными были годы в Петербургском университете. Спокойными, но наполненными напряженнейшей учебой и научными исследованиями — самостоятельными и коллективными. Потребность в постоянном творческом общении прошла через всю жизнь Фридмана. Натура деятельная, собранная и сильная, он постоянно бывал душой математических кружков — и в гимназии, и в университете, и после окончания его.

Потом, во «взрослой жизни», он умел так же сплачивать вокруг себя даровитых учеников, тех, кого не страшила ни трудная работа, ни требовательность учителя — доходящая порой до беспощадности. «Он горел сам, но умел зажигать и других, — вспоминала его жена, наблюдавшая Фридмана в кругу учеников, — его энтузиазм и доверие к лучшим сторонам человеческого «я» заставляли и других работать с ним бескорыстно и самоотверженно. Он никогда не «угашал духа», а поднимал его, вселяя веру в будущее и доверие к собственным силам и труду. «Это же мои дети», — говорил он про своих любимых учеников».

Еще в юности Фридман сблизился со своим университетским учителем академиком Стекловым, выдающимся математиком. Свидетельство этой близости — постоянная переписка, письма, которые писал Фридман всякий раз, разлучаясь со Стекловым: из Петербурга, когда тот уезжал из города, и с фронта, из Москвы и из Перми. Стеклов всегда принимал деятельное и горячее участие в делах Фридмана. Теплые отношения сохранились до конца жизни обоих — Владимир Андреевич Стеклов едва успел проводить в последний путь любимого своего ученика и вскоре скончался...

Письма Фридмана многое говорят о его характере, отношении к жизни, науке, к своей работе. Они самые правдивые рассказчики — откровенные и безыскусственные.

Летом десятого года Фридман не без горького юмора пишет уехавшему отдыхать Стеклову:

«Новостей у нас в Питере совсем мало. Ждем на побывку чуму, а пока довольствуемся холерой и плакатами о сырой воде».

Через год сообщается о другой новости, которая не затронула Петербурга; она касалась одного лишь автора письма, но была для него совсем немаловажной:

«Пришлось мне вспомнить изречение, о котором Вы говорили этой весной — «поступай как знаешь, все равно жалеть будешь». Дело в том, что я решил жениться. Я уже говорил Вам в общих чертах о своей невесте. Она учится на курсах (математичка); зовут ее Екатерина Петровна Дорофеева; немного старше меня; думаю, что женитьба не отразится на занятиях неблагоприятно. Впрочем, в таких делах, как мое, рассуждения всегда приходят post factum, действия же всегда производятся на основании чувства. Я пишу Вам о своем решении только теперь, за несколько дней (собственно говоря, даже часов) до свадьбы, т. к. зная непостоянство характера своего, боялся сообщить Вам ложные сведения».

За ироничным по отношению к своей особе и в то же время сдержанным, нарочито сухим, информационным тоном угадывается человек сильных чувств...

Женитьба «не отразилась на занятиях». Наоборот, Екатерина Петровна была верным и трудолюбивым помощником своего предельно занятого мужа, всегда работавшего до истощения и на истощение — с утра до утра. И, вероятно, никто как она, не чувствовал так глубоко, не понимал всей сложной, мятущейся натуры этого человека, которому всегда хотелось объять необъятное, всегда всего было мало — работы, времени, знаний. И никто не принимал так близко к сердцу вечную его неудовлетворенность собой.

Интерес к той области науки, которая стала основной его специальностью, к механике — «раю математических наук», по словам Леонардо да Винчи, и, в частности, к механике сплошных сред, гидро- и аэродинамике — определился у Фридмана довольно рано.

В 1913 году он стал сотрудником-физиком Аэрологической обсерватории в Павловске, близ Петербурга, которую возглавлял академик Голицын. Через год Фридмана послали в Лейпциг — там в то время работал профессор Бьёркнес, глава норвежских метеорологов.

Норвегия — страна мореплавателей, рыбаков и путешественников. Не удивительно, что именно ее ученые особенно активно пытались проникнуть в тайны атмосферных бурь и циклонов, раскрыть секреты мировой «кухни погоды».

В Европе готовились к встрече полного солнечного затмения, которое приходилось на август четырнадцатого года. Фридман тоже участвовал в подготовительных работах для аэрологических наблюдений во время затмения, несколько раз летал для этого на дирижаблях — тогда началась его «воздушная болезнь», непреоборимая страсть к полетам.

Но август четырнадцатого года принес не только затмение солнца, случилось другое затмение, куда более жуткое и долгое — разразилась мировая война.

Освобожденный от военной службы, Фридман вступает в добровольческий авиационный полк.

«На войне, как на войне»: «Превосходство сил противника ясно. Союзники наши как-то мешкают; это объясняется их привычкой к комфортабельной войне в прекрасно отмеблированных окопах»,— пишет Фридман Голицыну.

Но ученый, верно, никогда не перестает быть ученым, даже если он служит летчиком-наблюдателем.

«Оказывается, что бомбы падают почти так, как и следует по теории»,— написал Фридман Стеклову после удачного полета, во время которого он проверял созданную при его участии теорию бомбометания.

Разведка донесла, что когда бомбы точно накрывали цель, немецкие солдаты говорили:

— Сегодня летает Фридман.

Прицельное бомбометание — его теория, расчетные таблицы — одна сторона деятельности Фридмана на фронте.

Главной задачей стало организовать аэронавигационную службу в армии, создать сеть аэрологических станций, обучить наблюдателей-аэрологов, распространить эту работу на все фронты. Фридман становится руководителем Центрального управления аэронавигационной службы.

Это — исполнение долга.

Но есть и личный интерес: «На одном из аппаратов я установил телескоп (кометоискатель)»,— пишет Фридман Голицыну.

В те же месяцы Стеклов получает с фронта длинное письмо с уравнениями, интегралами — письмо, оканчивающееся почти что извинением:

«Не сердитесь, дорогой Владимир Андреевич, что я так разболтался; очень уж хочется поговорить о научных вопросах, от которых я теперь так далек; — потом, другим почерком — мне пришлось на половине прервать это письмо и лететь на охрану нашего змейкового аэростата от неприятельских аэропланов. Наблюдая в бинокль за стрельбой, которую вела по нас вражеская батарея, я с каждой вспышкой, с каждым выстрелом думал: «а вдруг письмо останется недописанным, вдруг через 8—10 секунд от аэроплана останутся лохмотья и он турманом полетит вниз, вдруг конец.

Иногда надоедает война, хочется скорей победы, оглушительной, сильной...»

Бывали эпизоды и пострашней — «на войне, как на войне».

«На вираже над оврагом вдруг сдал мотор, и если бы не чудо, да не искусство летчика, мы врезались бы на полной скорости в овраг».

«Первый полет был на Фармане-15, летчик передал мне управление, и я несколько минут вел аппарат в воздухе, а летчик стрелял в немцев из карабина; второй бой был грандиознее: мы вступили в бой с двумя неприятельскими аэропланами, из которых один был вооружен пулеметом; самое ужасное было слышать дробь пулемета, целившегося в нас; расстояние между аэропланами было ничтожное, и я считаю чудом, что спасся от смерти. Из неблагополучных полетов следует упомянуть два: во время одного из них, с земли сильный вихрь бросил аэроплан; он скользнул на крыло, и мы разбились вдребезги, т. е. не мы, вернее, а аэроплан».

Вихри сводили с Фридманом старые счеты! А он на собственной шкуре познавал все их коварство.

Но высота, воздух тянут по-прежнему остро:

«Я думаю по окончании своей аэрологической миссии научиться летать, — пишет Фридман Стеклову, — вещь эта теперь утратила свою острую опасность и может быть с огромным успехом применена к метеорологии, особенно к синоптике».

И опять: «В отряде, скуки ради, я немного учусь летать».

«За разведки я представлен к Георгиевскому оружию, — в этом же письме рассказывает он Стеклову, — но, конечно, получу ли — большой вопрос. Конечно, это как будто мелочность с моей стороны — интересоваться такими делами, как награда, но что поделаешь, так видно уж устроен человек, всегда ему хочется немного «поиграть в жизнь».

Свершилась революция. Советская Россия вышла из войны. Впереди, несмотря на огромные трудности бытия, и общего и личного, несмотря на серьезную болезнь сердца, перед Фридманом снова замаячила настоящая научная деятельность. Но лишь в двадцатом году удалось ему вернуться в «отчий дом» — в Павловскую аэрологическую обсерваторию под Петроградом.

Началась интенсивнейшая работа. «Целый вихрь новых идей захватывал его с неудержимой силой», — вспоминала жена.

Наверное, метафора эта — «вихрь идей» — была не случайна в семье Фридмана. Подлинные вихри — циклоны, грозные и беспощадные процессы в атмосфере — вот тот противник, которого стремился, должен был распознать и победить Фридман.

Он писал:

«Все хорошо знают, насколько человеческая жизнь и деятельность зависят от погоды и от тех явлений (бурь, ливней, гроз), которые время от времени бороздят земную атмосферу.

Загадка законов, управляющих атмосферными явлениями, лежит, безусловно, в неизведанных еще свойствах вихрей. Лучше всего поведение вихрей познается на соответствующей высоте, где вихри являются как бы «очищенными» от влияния земной поверхности».

Фридману так хотелось летать, так необходимо было летать.

Последний раз полетел он семнадцатого июля двадцать пятого года. Тот полет был русским рекордом высоты. Они поднялись на 7400 метров на аэростате, пилотируемом Павлом Федоровичем Федосеенко — великолепным воздухоплавателем, который погиб потом вместе с Васенко и Усыскиным, когда стратостат «Осоавиахим-1» впервые вознес людей в стратосферу на двадцать два километра.

Полет Федосеенко и Фридмана окончился благополучно, хотя и у них было достаточно острых минут, когда казалось, что смерть уже поджидает, уверенная в успехе... Но интереснее послушать самих астронавтов.

«В полете принял участие директор Главной геофизической обсерватории профессор А. А. Фридман с целью произвести ряд наблюдений над вихрями и облаками и начать серию высоких полетов на свободных шарах с научными задачами, — рассказывал Федосеенко. И дальше описывает один эпизод за другим...

Мы окутаны сплошной густой пеленой... Дождь... Мелкие ледяные иглы... Третий слой облаков... Израсходована добрая половина балласта, а мы все не можем выбраться из облаков, несмотря на высоту 4500 *м*...

Слышен какой-то странный звук, напоминающий удар в барабан, повторившийся три раза. Ну, думаю, не рвется ли сеть...

Плохо дело, если сеть, не вынеся напряжения, выпустит освободившийся шар ввысь, а мы камнем пойдем на землю...

Не говорю о возможной опасности своему спутнику».

Эта тревога оказалась ложной. Но следующую уж никак нельзя было скрыть даже от самого неискушенного непрофессионала.

«На высоте 6000 *м* мы почувствовали необходимость «закусить» кислородом,— рассказывал потом Фридман.— Пока мы возились с вдыханием кислорода, произошло несчастье. Среди полной тишины раздался оглушительный взрыв, мы взглянули наверх и видим, что аэростат весь окутан дымом. Сейчас же мелькнула мысль: «горим», шансов на спасение в этом случае очень мало. Потом дым рассеялся и мы увидели, что наш «кислородный сундук» лопнул. За дым мы приняли облако, которое образовалось из охладившегося и сконцентрировавшегося кислорода».

Потеря основного запаса кислорода сперва показалась чуть ли не пустяком. Но час спустя Фридман случайно разорвал два шара-пилота, в которых тоже хранился кислород.

«Пульс учащается. Профессор Фридман отказывается принимать кислород, оставляя его для меня, как для ведущего шар, приходится почти силой заставлять его вдыхать кислород, убеждая, что мы обоюдно должны поддерживать друг друга. В легких ощущается какая-то пустота. С большими усилиями, помогая друг другу, принимаем кислород».

«Зная, что наш запас кислорода чрезвычайно мал, я все время упорно отказывался дышать им, сберегая кислород для пилота,— о том же говорил и Фридман.— Соображения у меня были простые — пилот был сильнее меня, мог лучше вынести недостаток воздуха, и именно ему, умевшему управлять шаром, надо было сохранить максимальную свежесть, я же мог находиться в полуобморочном состоянии, и спокойно лежа в корзине шара, достигнуть нижних плотных слоев, если только пилот сохранит способность управлять аэростатом. Словом, кислород в первую очередь нужен был пилоту, а не мне. Однако самоотверженный т. Федосеенко угрозами заставил меня «кормиться» кислородом, и думаю, что этим его угрозам я в значительной степени обязан жизнью».

Так, соревнуясь в самопожертвовании, экипаж аэростата после десятичасового пребывания в воздухе, в конце концов, достиг земли.

Фридман писал:

«Теперь, когда пережитое с быстротой нашей жизни отодвигается в мрак прошлого, я думаю: «полечу ли еще?» и отвечаю себе определенно: «конечно, полечу». И хотя иронический голос шепчет мне: «от хорошей жизни не полетишь», но мне кажется, что иногда и от хорошей жизни летают. Слишком много в полете неожиданных, исключительных по своей силе ощущений! А для ученого слишком много в полете возможностей проникнуть ближе за завесу, покрывающую тайны природы».

«Во всех его полетах была частица этого стремления оторваться от земли, ...подняться выше, то «Excelsior», которое было девизом его жизни»,— вспоминала Екатерина Петровна Фридман.

Как прочесть, как истолковать эти слова?

В них сказано очень многое о человеке...

Мы почувствуем и его «мечту о возможности снестись с иными мирами».

И зов этих далеких миров, который, кто знает, может и завлек Фридмана в тот запутанный лабиринт, который являет собой сложнейшее строение Вселенной.

И неодолимую потребность как можно шире раздвинуть рамки земного.

И радость встреч и борьбы с грозными силами природы.

И сознание, что это необходимо людям, что землю людей надо защищать.

А еще, может, было тут и просто физическое счастье от самого полета, физическое ощущение полета...

«Выше, выше...» — с этими словами умирал Пушкин. С этими словами он жил.

Похоже, тот же смысл вкладывал Фридман в слово Excelsior.

...Больше Фридману летать не пришлось. Через два месяца после полета его не стало.

Если полистать журналы тех дней, научные, авиационные, видишь — на страницах их скорбь и печаль. Ушел, и так несправедливо рано, замечательный человек. Ушел человек, которого некем заменить, второго такого нет,— так говорят те, кому довелось работать и общаться с ним.

Директор Прусского метеорологического института профессор Фикер, который был в это время в Ленинграде и Москве на праздновании двухсотлетнего юбилея Академии наук, писал Стеклову: «Только одна тень будет навсегда омрачать воспоминания об этих днях — смерть А. А. Фридмана, в котором Вы потеряли одного из самых блестящих учеников и которого будет оплакивать каждый метеоролог. Крепчайшая надежда теоретической метеорологии отошла с ним».

Работы Фридмана по метеорологии, родоначальником которой в современном ее, «научном обличье», он по справедливости считался — целая эпопея. И, может, наука о погоде, о климате не менее важна людям, чем теория расширяющейся Вселенной. И бо́льшая часть его жизни была отдана именно этим, метеорологическим проблемам. Но они не имеют отношения к теме книги, поэтому здесь упомянуты только вскользь.

Кому много дано, с того много спросится. Фридману было дано много, очень много, но спрашивал он с себя чрезмерно. «Я работолюбивый»,— говорил он. Но разве можно назвать такое просто любовью к работе? Похоже, что это было непрерывное самосожжение.

— Нет, я невежда, я ничего не знаю, надо еще меньше спать, ничем посторонним не заниматься. Вся эта так называемая «жизнь» — сплошная потеря времени,— повторял он с отчаянием и себе и жене.

Человеку отпущено не щедро — и жизни, и времени, и сил. И беспредельно пространство непознанного. Каждый, кто привержен науке, не может не страдать от этого, не может об этом не думать. Фридман страдал почти патологически. Он часто вспоминал слова Ньютона о великом океане знания и бедных ученых, подбирающих лишь те камешки, которые море выбрасывает им на берег. Вспоминал, но не мог, не хотел с этим мириться.

В нем шла постоянная внутренняя борьба с самим собой. Тревожило, завлекало множество разных проблем, целых наук. Во все хотелось проникнуть глубоко, до основания, заняться ими всерьез; иначе — не всерьез, по-дилетантски — он просто не умел. Едва он начинал чем-то интересоваться, сразу рождалось множество собственных идей.

И с почти маниакальной жестокостью запрещал он себе эти отклонения от основного дела. «Если я разбросаюсь, то погибну»,— повторял он, зная свой увлекающийся характер, и боролся с ним без пощады. Так же заставил он себя отказаться от большой любви, которая пришла к нему в последние годы жизни — заставил потому, что новое чувство слишком захватило его, занимало его мысли, отвлекало от работы, требовало слишком много душевных сил. Вся жизнь его прошла в постоянном самоограничении, в борении с самим собой.

А когда он себе разрешал «разброситься», или не хватало сил удержаться — никто теперь не расскажет, как это бывало,— тогда начиналась счастливая встреча с новым.

Наверное, именно так он встретился с теорией относительности.

Геометрия гигантских пространств

Помните, как в пробной лекции Риман говорил: «Для объяснения природы вопросы о неизмеримо большом — вопросы праздные».

О чем он думал?

О недоступности далеких расстояний? Об иных мирах, которые навсегда останутся неведомы человеку? Или о том, что наука не имеет права на праздные разглагольствования по поводу того, что сегодня лежит далеко за пределами ее возможностей? Слова Римана можно толковать как угодно. Сам он не захотел или не посчитал нужным расшифровать их ни для своих слушателей, ни для потомков.

В то время подобный вопрос действительно был праздным. Сегодня он стал центральным, основным для целой науки — космологии. Именно космология изучает строение и характер Вселенной «в большом», почти что «в неизмеримо большом», на гигантских расстояниях — во времени и в пространстве.

Космология в современной, научной ее форме, возникла и растет на базе общей теории относительности. А сама общая теория относительности, универсальность и общность которой трудно с чем-нибудь сравнить, для своего строгого математического оформления воспользовалась аппаратом словно специально для нее созданной римановой геометрии. Имея это в виду, Эйнштейна можно в известном смысле считать духовным наследником Римана.

В последние годы среди физиков и астрономов в сильной степени возродился интерес и к общей теории относительности, и к идеям Фридмана.

Конечно, общая теория относительности — грандиозное учение о пространстве, времени и тяготении, значимость которого непреходяща. И расширение Вселенной есть тот несомненный факт, который ныне астрофизики непременно кладут в основу своих концепций о мире в «неизмеримо большом». Но сейчас, как никогда, возросла практическая роль этих теорий в бурно развивающейся космологии. Причем не только теория относительности помогает познавать Вселенную — тут действует и обратная связь.

Появились новые методы экспериментального исследования космоса — ближнего и дальнего. Появилась возможность изучать астрономические объекты вне земной атмосферы, так мешающей физикам, на искусственных спутниках и ракетах. Теперь можно с большей точностью проверять эффекты общей теории относительности, выводы и следствия из нее.

Даже специальный термин возник, не точный, если переводить буквально, но краткий и очень выразительный — «space relativity». По смыслу — это экспериментальное изучение всего комплекса проблем, связанных с общей теорией относительности, причем базой эксперимента служат приборы и установки, вынесенные за пределы земной атмосферы и передающие информацию из космоса.

Давно уже прошли времена, когда все успехи астрономии были, грубо говоря, пропорциональны размеру зеркала телескопа, того, что ведет свое происхождение от подзорной трубы Галилея. Ныне у астрофизики и космологии целый арсенал: им служит не только оптика, но — в не меньшей мере — и радио; служат им также рентгеновские и гамма-лучи, и элементарные частицы. Радиоастрономия исследует Вселенную с помощью радиоволн, которые излучают различные космические объекты, от звезд до скоплений галактик.

Оказалось, что галактики, излучающие более или менее одинаковое по мощности количество видимого света, могут сильно разниться мощностью радиоизлучения. Те из них, которые ярко сияют на «радионебе» — небе, не видимом глазом, вооруженном телескопом или невооруженном, — стали называть радиогалактиками. Например, радиогалактика Лебедь А излучает видимого света в два раза больше, чем наша Галактика, а мощность ее радиоизлучения превышает «нашу» мощность уже в миллионы раз. Поэтому-то наш Млечный Путь не принадлежит к числу радиогалактик. Достаточно мощное радиоизлучение обнаружено у всех ярких эллиптических галактик — все они являются радиогалактиками. Их известно сейчас около десяти тысяч, а исследовано несколько сотен. В последние годы радиоастрономия открыла еще более интересные объекты, так называемые квазары — квазизвездные радиоисточники. Эти таинственные образования представляют собой не систему звезд, как галактики, а нечто целое, единое, некую сверхзвезду. «Сверх» — потому что масса квазара всего примерно в сто раз меньше массы целой галактики.

Большинство квазаров расположено на самой периферии Вселенной и удаляется от нас со скоростями порядка скорости света.

Если оптическую астрономию следует назвать родоначальницей наблюдательного исследования Вселенной, то радиоастрономия — ее старшая дочь, сегодня уже совершенно зрелая и самостоятельная. Становятся на ноги и младшие сестры, те, что берут начало с другого, коротковолнового, конца спектра электромагнитных волн — рентгеновская и гамма-астрономия. Теперь зарождается даже нейтринная астрономия. У каждой свои возможности, свой диапазон исследований.

После многолетних обширных наблюдений астрономы убедились, что небо во всех частях в среднем равномерно заполнено галактиками. Число их достигает миллиардов. Подавляющее большинство из них, как уже говорилось, объединено в системы — скопления галактик. Все объекты, лежащие в доступной нашим приборам области Вселенной — галактики и радиогалактики, скопления галактик и квазары — образуют мощную систему со своей структурой, называемую Метагалактикой.

Мир, Вселенная, Метагалактика... Мы часто придаем этим словам один и тот же смысл, считаем их равнозначными. Может, это чуть-чуть не вполне строго и следовало бы, если речь идет о физическом исследовании — наблюдательном или теоретическом, об измерениях или расчетах, говорить лишь о Метагалактике.

Это, быть может, не просто вопрос терминологии. Когда мы говорим «Вселенная», то подразумеваем тот мир, кроме которого ничего больше нет и быть не может. Недаром Пуанкаре сказал, что Вселенная «издавна лишь в одном экземпляре». Когда мы говорим «Метагалактика», то подразумеваем тот мир, который человечество непосредственно наблюдает и который оно, вероятно, сможет, по крайней мере принципиально, в какие-то мыслимые сроки исследовать, познать и объяснить. Говоря о Метагалактике, мы имеем право задавать вопрос и о размерах, о происхождении, о времени жизни ее.

Но это и не уловка, не способ уклониться от ответа на острые вопросы: «Что же за пределами Вселенной?» или «А что было до начала?». Не только нет возможности ответить на эти вопросы, но и неизвестно, правомочны ли мы такие вопросы ставить.

Но не надо думать, что с Метагалактикой все уже просто и ясно — даже если речь идет тоже о праве ставить вопросы. Мы ведь не дошли до ее границ — пространственных и временных — ни в теории, ни в наблюдениях. И когда дойдем — неизвестно. И неизвестно, дойдем ли вообще, возможно ли такое в принципе. А чем ближе к границе, тем больше сложностей, и несть им числа. Очень вероятно, что принятые сейчас теории, хорошо объясняющие физические явления, в том числе и в доступных нам областях Вселенной, потребуют существенных изменений или окажутся вовсе неприменимыми у границы, потому что там материя, быть может, существовала в совершенно особой, незнакомой нам форме. Например, плотность ее на много порядков превышала плотность атомного ядра — самую гигантскую из известных нам.

В известном смысле, в Метагалактике столько же сложного и таинственного, как и во всеобъемлющей Вселенной. И, повторяем, для человечества, для науки Вселенная пока — а может, так будет вечно — ограничивается Метагалактикой, что тоже совсем не мало! Поэтому будем употреблять эти термины в одном и том же смысле и не пугаться фраз, вроде «если Вселенная бесконечна...» или «если мир замкнут...».

Итак, мы покидаем твердую почву математики и отправляемся путешествовать в неизведанные и до предела трудно доступные космические дали.

Сейчас развитие науки и постижение тайн мироздания идет гигантски большими шагами. У ученых крепнет уверенность, что они стоят на пороге крупнейших открытий, что опять грядет «революция в нашем понимании космоса» — революция, которая, быть может, еще беспощадней, чем предыдущая, сокрушит наши законы и наши представления о Вселенной.

Открываются все новые явления, часто загадочные, не поддающиеся расшифровке. Они ставят в тупик исследователей, не укладываются в их сознании, даже таком широком и натренированном теперь.

Можно сказать, что ныне рядом, с переменным успехом, обгоняя друг друга, идут два процесса: проясняется один туман, возникает другой. Счет закрывается и открывается вновь. В этом непрерывном становлении и разрешении все бо́льших и бо́льших трудностей коллективное мышление теоретиков соревнуется с наблюдениями и экспериментом.

Экспериментальные открытия не только возбуждают чуткое воображение теоретиков, но и побуждают их к поискам новых, часто невероятных гипотез. Гипотезы эти одни крупные ученые принимают частично или целиком, другие полностью отвергают. Да и сами авторы нередко пересматривают свои взгляды или видоизменяют, реформируют их.

Процесс этот неизбежный, естественный — только очень уж велик темп его и грандиозны масштабы охваченных им явлений. Вот почему так важно здесь — в той мере, в какой возможно — поставить точки над «и», сказать: это мы уже твердо знаем, это представляется нам вероятным — или, наоборот, маловероятным, а вот это лежит пока за пределами наших сил.

Да, очень важно сейчас отделить доказанное от неизвестного, хотя надо все время помнить, как зыбка и непостоянна граница между тем, что и как мы знаем сегодня, и тем, что будем знать завтра.

Прежде всего надо сказать, что на основной вопрос космологии — в каком мире мы живем, какой из моделей Вселенной, разработанных человеческим гением, отдала предпочтение природа — ответа пока нет.

Этот вопрос зародился у Лобачевского, потом был снова поставлен Риманом. Он глубоко занимал Эйнштейна и Фридмана. Последние годы он стал предметом размышлений и расчетов крупнейших теоретиков, но — ответа нет.

Конечно, было бы нелепо и несправедливо думать, что наука, в частности в этом вопросе, недалеко ушла. Она шагнула очень далеко вперед даже со времен Фридмана, который говорил, что «изучение Вселенной — в самой младенческой стадии». Даже со времен Эйнштейна, который предупреждал, что не исключены условия —

в прошлом Метагалактики или, что по существу то же самое, в каких-то сверхотдаленных ее областях, когда его теория может оказаться несостоятельной и надо будет искать новые идеи.

Кстати, этот вопрос — о возможных границах применения общей теории относительности — ныне чрезвычайно занимает физиков; он стал одной из главных проблем современной космологии.

Как мы знаем, эффекты теории тяготения Эйнштейна отличают ее от ньютоновской теории тем больше, чем сильнее само тяготение, сильнее гравитационные поля. Вот один любопытный расчет. Уже говорилось, что перигелий Меркурия, ближайшей к Солнцу планеты, смещается за столетие на 0,43 угловой секунды, больше, чем это следует из теории тяготения Ньютона. Как известно, по Ньютону, сила тяготения убывает пропорционально квадрату расстояния. Оказывается, если вместо квадрата, вместо цифры 2, взять степень 2,00000016, то столь мало измененный закон Ньютона дает нужное смещение перигелия Меркурия. Но в Метагалактике, в целом, сильны гравитационные поля, поэтому в ней властвуют законы Эйнштейна. Абсолютизм ли это или есть пределы, границы самовластия? Над этим вопросом, повторяем, задумывался сам Эйнштейн. Теперь его пытается разрешить наука конца шестидесятых годов.

Надо сказать, что до сих пор на вопрос: «Справедлива ли общая теория относительности?» каждая экспериментальная проверка давала однозначный ответ: «Справедлива». С большей или меньшей точностью, но ответ был неизменно положительный. Пока никаких отклонений не обнаружено.

Но можем ли мы с уверенностью говорить, что они никогда и не встретятся? Нет, не можем. Такой гарантии дать нельзя.

Остановимся пока... здесь лежит «полюс недоступности». Здесь возможны лишь самые общие предположения — даже авторы не всегда решаются назвать их гипотезами.

И не только потому, что речь идет о временах около десяти миллиардов лет и о расстояниях, на пятнадцать порядков, то есть в 10^{15} раз превосходящих расстояние от Земли до Солнца — ориентировочно предполагаемый радиус Метагалактики, если выразить его в километрах, запишется десяткой с двадцатью четырьмя нулями!

Здесь все отлично от того, с чем физики и астрономы привыкли иметь дело. И чем ближе к границе — с каждым шагом, с каждой секундой — тем стремительней растет число вопросительных знаков, тем более огромными, более устрашающими становятся эти наступающие на ученых знаки вопроса.

Будем оптимистами. Теперь в резерве у науки большой и совершенно не известный прежде, даже в конце жизни Эйнштейна, наблюдательный материал. С помощью всех своих телескопов — оптических, радио и других — наука теперь видит гораздо дальше, а значит — видит то, что происходило гораздо раньше во времени. Ведь мы помним, что чем дальше находится от нас объект, тем дольше идет от него излучение; поэтому самые далекие объекты мы видим совсем молодыми, в пору их ранней юности, а наших ближайших соседей — постаревшими, сегодняшними.

Естественно, что с вопросом об истинной структуре Вселенной, так сказать, с вопросом «пространства» тесно связан и вопрос «времени» — вопрос эволюции Метагалактики.

Действительно, ее расширение, теоретически открытое Фридманом, а экспериментально Хабблом, есть факт безусловный и доказанный. Значит, оглядываясь назад, мы должны представить Метагалактику гораздо более плотной, находящейся в совершенно отличном от нынешнего состоянии.

Как далеко от нас это «назад» и что тогда было с миром, какой он был? — вот вопрос вопросов космологов.

Еще так недавно даже отвлеченные размышления по этому поводу считались чуть ли не мистикой, занятием, недостойным настоящего ученого. Теперь это предмет не только размышлений, но и математических расчетов, которые подкрепляются сведениями о Вселенной, накопленными за последние годы. Значит, за эти годы наука не просто ушла далеко вперед. Произошел огромный скачок — ее реальным делом стало решение проблем, о которых она прежде и помышлять не могла.

Вот немного фактов и цифр — чтобы оценить этот скачок.

Предполагают, что сейчас, в наше время, средняя плотность вещества в Метагалактике близка к 10^{-29} грамма в кубическом сантиметре (то есть в среднем в одном кубике содержится ничтожно малое количество материи, около одного грамма, деленного на десять с двадцатью девятью нулями).

Средняя плотность Солнца примерно равна плотности воды — один грамм на кубический сантиметр.

А максимальная из наблюдаемых нами плотностей — когда материя находится в чисто ядерном состоянии — равна 10^{14} граммов на кубический сантиметр. Это прямо-таки фантастическая цифра — сто тысяч миллиардов граммов вещества в одном кубическом сантиметре.

Астрофизиков интересует, была ли когда-нибудь во Вселенной плотность больше ядерной? А если была, то в какой форме, в каком состоянии находилась тогда материя?

Разгадка, если она придет, поможет решить и другие вопросы. И прежде всего, главный — что было «в начале мира»? С чего и как началась та фаза развития Вселенной, которую мы ныне видим, в которой живем.

Обратимся к наблюдениям — «спрашивайте природу», как говорил Лобачевский.

Природа не всегда охотно рассказывает. Тем ценнее удача с открытием квазаров. Они, вероятно, больше, чем что-либо другое, могут помочь расшифровать прошлое Вселенной.

Квазар 3С273-В виден в оптический телескоп как маленькая слабая звездочка. А на самом деле эта «звездочка» излучает примерно в сто раз больше видимого света, чем вся наша Галактика. Чтобы было ощутимее, скажем, что некоторые квазары светят, как тысяча миллиардов солнц — и в течение длительного времени.

Уже открыто более сотни квазаров. Некоторые из них удаляются от нас со скоростью, доходящей до четырех пятых скорости света! При этом излучаемые ими волны, которые лежали в ультрафиолете, по закону красного смещения увеличиваются больше чем в три раза, и спектральная линия из коротковолнового ультрафиолета попадает в видимый спектр — ее принимают на оптическом спектроскопе.

Так впервые появляется возможность наблюдать те линии спектров, которые в своем естественном коротковолновом качестве никогда не удавалось сфотографировать, потому что короткие волны чрезвычайно сильно поглощаются атмосферой Земли.

Но и это не самое важное. Гигантские скорости, близкие к световой, с которыми уходят от нас некоторые квазары, свидетельствуют о том, что они обретаются недалеко от границы нашего мира. Вспомним закон Хаббла: чем дальше находится объект, тем с большей скоростью он удаляется — именно об этом и говорит возрастание красного смещения.

Квазары излучают такую гигантскую мощность, что ее трудно объяснить известными физикам процессами. И вообще они являют собой клубок неожиданностей, парадоксов и противоречий. А каждое новое их наблюдение, новый факт лишь множат эти парадоксы.

Совсем недавно, в 1967 году, квазары задали еще одну загадку ученым. Причем выступили они в роли чистых информаторов — неожиданное явление связано, видимо, с процессами, касающимися не самих квазаров, а всей Вселенной в целом. Но это — особый разговор, который мы чуть-чуть отложим.

Сегодня можно с известной точностью рассчитать, каким был мир около восьми-девяти миллиардов лет назад.

Ученые полагают, что тогда плотность материи была всего лишь в сто раз больше нынешней. Раньше, когда происходило образование галактик, она могла быть еще в сто раз больше. А на совсем ранних стадиях эволюции Вселенной величина ее могла повыситься еще на несколько порядков. Но даже и тогда она была много меньше средней плотности атмосферы Земли. Проникнуть так далеко назад и увидеть мир, подчиняющийся нашим законам!

А если еще дальше? Еще ближе к началу?

Здесь факты и наблюдения главное место уступают гипотезам и предположениям. Здесь, повторяем, больше вопросительных знаков, чем достоверности.

Вот, например, уже заинтриговавший нас вопрос: могла ли быть такая фаза в развитии Вселенной, когда материя настолько сильно была «спрессована» гравитационными силами, что плотность ее равнялась ядерной или даже превышала плотность атомных ядер?

Одни ученые убеждены, что такая фаза существовала, больше того, в некий момент величина плотности была чуть ли не бесконечной. Другие отвергают возможность подобного критического момента, или, как его называют, особенности в жизни Вселенной. Но все допускают, что на самых ранних стадиях эволюции сжатие могло быть настолько сильным, что плотность равнялась ядерной или даже превосходила ее.

Все в начальной фазе вызывает сомнения. В том числе и законность подхода к ней с нашими «земными» представлениями. И применимость наших физических законов, в частности общей теории относительности для описания этого особого состояния материи, а значит, и особого состояния пространства-времени.

Но забудем пока о смущающем «начале». Отойдем от этой зыбкой границы. Останемся в пределах, где космология стоит на твердой почве. В таких пределах мы имеем право считать Вселенную в среднем однородной — в любой ее достаточно большой области, в любом направлении.

Значит, пространство наше имеет всюду одинаковую метрику, и мы теперь с сознанием полной правомочности — и с высоты последних достижений науки — можем вернуться к волнующей нас загадке: в каком пространстве мы живем?

В пространстве Лобачевского или Римана? В бесконечном — открытом — или в замкнутом?

Все решает плотность материи,— эту фразу в космологии приходится повторять снова и снова — как рефрен.

Все решает средняя плотность материи во Вселенной.

Разные «жители» населяют Вселенную. Звезды, группирующиеся в галактики, и скопления галактик. Пыль, отдельные атомы и молекулы, рассыпанные в межгалактическом пространстве, потоки элементарных частиц. Наконец те, кого называют «неклассическими» представителями материи (потому что они живут не по «общепринятым», «классическим», а по своим, квантовым законам). Это — фотоны, кванты электромагнитного поля, пока еще не обнаруженные гравитоны — кванты полей тяготения и крайне популярные сейчас, но почти неуловимые нейтрино, плотность которых, возможно, вносит весьма существенный вклад в «общий котел».

Если взять плотность всех этих видов материи и усреднить ее по всему пространству, то в результате, естественно, получится средняя плотность.

Так как Вселенная расширяется, то для каждого отрезка жизни Вселенной существует свое критическое значение средней плотности. В наше время оно равно около 10^{-29} *г/см³*.

Эта поразительно малая по величине постоянная играет столь же поразительно большую роль в космологии. Хотя правильней будет сказать, что роль играет разность между действительной, на самом деле существующей плотностью, и критической. Как много зависит от этой разности...

По существу — все, что нас интересует.

Конечна или бесконечна Вселенная.

Будет ли она всегда расширяться или наступит час, когда расширение сменится сжатием.

Какая кривизна у пространства — положительная, отрицательная или нулевая.

Если действительная плотность материи меньше критической, то силы тяготения не смогут остановить расширение Вселенной. Она будет неограниченно расти, будет бесконечной. Бесконечно будет и полное количество материи во Вселенной. При такой плотности кривизна пространства отрицательна, то есть в нем царит геометрия Лобачевского.

Если же фактическая плотность превышает критическое значение, то взаимное притяжение материи когда-нибудь преодолеет расширение Вселенной, остановит разбегание галактик, и мир наш начнет сжиматься. В этом случае Вселенная, как бы ни были велики ее размеры, всегда останется конечной. Пространство имеет положительную кривизну, и им управляет геометрия Римана.

Значит, критическая плотность оказывается критической для самых важных характеристик Вселенной.

Прилагаются все усилия, чтобы узнать, какая же она на самом деле — истинная плотность нашего мира? Больше критической или меньше?

Но точного ответа нет. Нет, потому что мы еще слишком мало знаем. Мы еще только подбираем ключи к решению.

Однако некоторые физики уже сейчас предлагают свои варианты расчетов. По одним получается, что действительная плотность вещества во Вселенной больше критической, по другим — меньше.

Но можно с уверенностью сказать, что результаты будут не раз еще пересматриваться и уточняться. Англичане шутят, что астрофизик — это человек, который часто ошибается, но никогда не сомневается. Если каждый уверен в своем результате, то сомневаться должно всем остальным, и прежде всего — самой науке.

Итак, пока еще нельзя сказать, живем мы в пространстве Лобачевского, Римана или Эвклида.

И всегда ли будет Вселенная расширяться или наши потомки в бог знает каком колене смогут наблюдать не красное, а синее и фиолетовое смещение.

И конечна или бесконечна Вселенная, мы тоже решить не можем. Пока не можем.

Значит, пока остается лишь утешать себя тем, что будь все известно, было бы скучно жить.

Еще один интересный факт. Оставайся Вселенная стационарной, определить знак ее кривизны оказалось бы несколько проще. Расширение же создает похожую видимую картину и в случае замкнутого, конечного мира и в случае открытого, бесконечного. В обоих случаях существует так называемый «горизонт», тот предел, дальше которого мы даже в принципе не можем увидеть космические объекты.

А теперь вернемся к «началу», к гипотетическому началу мира.

Здесь пойдет речь о чем-то уж вовсе фантастическом. Правда, некоторые ученые полагают, что идеи, слишком невероятные для фантастических романов, недостаточно фантастичны для того, чтобы описать реальность. Сейчас очень популярны слова Нильса Бора — сначала они прозвучали как парадокс, а ныне стали классикой, их повторяют все — слова о том, что «безумство» новых представлений о процессах в микромире еще недостаточно безумно, еще не дошло до той степени невероятности, когда можно надеяться, что эти представления сумеют верно объяснить, что́ есть микромир, как он живет, что в нем происходит.

Так что теперь никого не удивишь тем, что безумный, безумный, безумный мир существует рядом с нами. И убеждать в этом теперь тоже никого не надо.

Чтобы попасть в «начало», давайте на этих страницах как бы повернем время вспять. Станем двигаться не от «начала мира» к сегодняшним дням, а наоборот — от «сегодня» к «вчера», «позавчера» и все дальше и дальше назад, в глубь времен. Так будет легче, потому что мы начнем с более или менее известного, доказанного, а кончим гипотезами и догадками.

Такой путь естествен и потому, что и в своих догадках, в попытках построить модели «царства прошлого» и «начала мира» ученые тоже идут от «сегодня» к «вчера». Они, учитывая и рассчитывая процессы, происходящие ныне во Вселенной, тянут нить в ее прошлое, или, говоря научно, экстраполируют ее нынешнее состояние в прошлое; они пытаются себе представить, какие процессы в прошлом могли и должны были привести Вселенную в нынешнее ее состояние. И сверяют свои догадки с наблюдениями, с опытом.

Конечно, чем дальше назад, тем все менее надежной, менее достоверной, а значит, и менее правомочной становится такая экстраполяция.

Поэтому понятен самый пристальный, жадный, нетерпеливый интерес к новым фактам, новым открытиям — особенно к тем, которые смогут что-то рассказать о «первых днях творения», о тех процессах, с которых, возможно, начала свое существование Метагалактика.

Сенсацией 1965 года стало открытие загадочного излучения.

Мазер радиотелескопа Белл Компани обнаружил на длине волны 7,35 сантиметра какой-то постоянный шумовой фон. Этот фон не зависел от направления — в какую бы сторону ни поворачивалась антенна телескопа, шум был все тот же. Он был один и тот же днем и ночью, зимой и летом. Его нельзя было приписать ни одному из известных источников радиоизлучения. Наконец, нельзя было заподозрить и какой-нибудь промах, нечистоту в измерениях: радиотелескоп демонтировали, собрали заново, а шум не исчез.

Этим постоянным излучением оказалось заполнено все пространство — вот почему телескоп, куда бы он ни повернулся, улавливает шум. Следовательно, не наша Галактика и не какой-нибудь другой отдельный объект породил этот фон.

А кто? Оставим пока вопрос открытым...

Астрофизики рассчитали, что это излучение соответствует температуре, равной трем градусам — по абсолютной шкале. Значит, Метагалактика, во всяком случае, вблизи нас, пронизана этим постоянным по температуре излучением.

Для проверки открытия, естественно, стали искать такое же излучение и на других длинах волн. И нашли. И на более длинных волнах, и на более коротких: 20,7 *см*, 3,2 *см*, 1,5 *см* и 0,26 *см*.

Итак, в спектре радиоволн есть уже несколько надежно измеренных точек, которые позволяют заключить: да, Метагалактика во всех своих областях наполнена квантами, которые сохранили энергию, соответствующую трем градусам Кельвина.

Откуда взялись и как расселились во Вселенной эти кванты?

Давным-давно — начнем как сказку, но то, что мы расскажем, и вправду похоже на сказку — около десяти миллиардов лет тому назад материя нашей Метагалактики находилась в состоянии крайней плотности, может быть, гораздо большей, чем плотность атомного ядра, и имела очень высокую температуру. Сложные процессы взаимодействия между частицами такой раскаленной сжатой плазмы привели к сверхгигантскому — тут даже нет подходящего слова, чтобы передать масштабы события — взрыву. Поэтому ему придумали специальное имя — «big bang» — «большой удар». Произошло взрывное расширение Метагалактики.

Обнаруженное ныне излучение возникло на одной из стадий взрыва, это, как шутят астрономы, радиорепортаж о сотворении мира, репортаж, который дошел до нас с опозданием на десяток миллиардов лет. За это время кванты «постарели», от возраста охладились... А если говорить серьезно, то при расширении Метагалактики длина волны квантов растет в той же степени, в какой увеличиваются расстояния между обитателями Вселенной, например, между скоплениями галактик; и в той же степени уменьшается энергия квантов и соответствующая ей температура. Вот почему сейчас она равна всего трем градусам по абсолютной шкале.

Чтобы рассказ о предполагаемом «сотворении мира» прозвучал убедительней, не станем нарушать установленного нами правила игры: пойдем к далекому началу из сегодняшнего дня. И по дороге на разных этапах будем отмечать и факты, уже подтвержденные наукой, и гипотезы, покоящиеся то на более, то на менее надежных основаниях.

Итак, мы садимся в машину времени и из сегодняшнего дня отправляемся в далекое путешествие — в прошлое Вселенной, или, здесь будем точны, в прошлое Метагалактики.

Пролетая примерно девять десятых, а может, даже и четырнадцать пятнадцатых жизни Метагалактики, то есть около девяти миллиардов лет, мы будем наблюдать примерно одну и ту же картину. Всюду, по всем направлениям равномерно распределенные галактики и скопления их «плавают» в океане межзвездной материи. Средняя плотность вещества постоянна. Естественно, по мере продвижения в глубь времен величина ее становится все большей и большей; но в каждый момент среднее значение ее неизменно во всей Вселенной. В звездах идут понятные нам термоядерные реакции, идут и другие процессы — и ясные и необъяснимые до сих пор. Различные звезды и галактики находятся на разных стадиях эволюции — так же, как и сейчас.

Короче, пролетев четырнадцать пятнадцатых пути, мы обнаружили, что Метагалактика после того, как прожила одну пятнадцатую часть жизни, в главных своих чертах стала такой, какую мы наблюдаем сегодня; качественно такой же. В любых своих частях, до каких только удается «дотянуться» нашим приборам, она одинакова...

Передохнув, полетим дальше.

Следующую остановку сделаем для того, чтобы поздравить Метагалактику, так сказать, с совершеннолетием, которое наступило, когда она прожила около трехсот тысяч лет.

Астрофизики полагают, что, переступив свой отроческий возраст, материя начинает как-то организовываться. До этого температура ее превышала три-четыре тысячи градусов; а при такой температуре атомы ионизованы, лишены электронов. Атомные ядра и электроны сильно взаимодействуют с излучением, плотность которого в то время была много выше плотности вещества. Происходит борьба: силы тяготения стремятся собрать вещество воедино, увеличить его массу, а давление излучения препятствует этому, «расталкивает» частицы вещества.

Теоретики рассчитали, что сначала побеждало излучение, а потом, по мере охлаждения вещества, когда ядра, присоединяя к себе электроны, превращались в атомы, силы тяготения взяли верх, стали превалировать над силами отталкивания; тогда-то и началось образование звезд.

Когда дозвездная материя начала организовываться, то при этом процессе выделялось огромное количество энергии. Существует предположение, что энергия эта и поныне наполняет собой Метагалактику. Она приобрела обличье плазмы — горячей, сильно ионизованной плазмы, населившей все пространство. Очень вероятно, что средняя плотность этой межгалактической среды, горячего межгалактического газа больше плотности звездных масс — конечно, если плотность звезд усреднить и распределить по всему объему Метагалактики. Это обстоятельство астрофизики теперь непременно учитывают, вычисляя среднюю плотность материи во Вселенной.

Взрывные процессы, которые происходят то в одной, то в другой из галактик, своей энергией подпитывают межгалактическую плазму и помогают ей удерживать свою высокую температуру.

Теперь пролетим третий этап пути — триста тысяч лет — и остановимся у отметки «100 секунд».

Не правда ли, странно, что там, где речь идет об огромных периодах времени, о миллиардах лет, мы называем приблизительные цифры, с гораздо большей определенностью говорим о миллионе лет, которые прожила Метагалактика на заре своей юности, и поразительно точны, когда дело доходит до первых секунд ее существования?

Но этому есть объяснение. Происходившие, как предполагается, в первые моменты времени взаимодействия между элементарными частицами и ядерные реакции поддаются точному расчету. Поэтому если события протекали действительно так, как ныне думают ученые, если нет ошибок в описании самих процессов, то нет ошибки и в шкале времени, соответствующей этим процессам.

Итак, что же было через сто секунд после возникновения Метагалактики, после «сотворения мира»?

К этому времени в основном завершились первые на свете ядерные реакции. Из «месива» элементарных частиц — протонов, нейтронов, электронов и позитронов — после целого ряда их превращений и взаимодействий, как между собой, так и с излучением, образовались первые элементы: водород и гелий. Плотность вещества была в сто раз выше плотности воды, а температура равнялась примерно миллиарду градусов.

А до того в первую треть секунды вся материя была сосредоточена в малом объеме и имела огромную температуру и огромную плотность. Особенно велика была плотность излучения — на каждую частицу приходилось около миллиарда квантов. Температура всей этой отчаянно спрессованной материи доходила до тридцати миллиардов градусов.

Рассказанная здесь история первых мгновений жизни Метагалактики вытекает из гипотезы, называемой «горячей моделью Вселенной».

В конечном счете от процессов в те первые секунды и должны были расселиться по миру кванты, по расчетам авторов и сторонников этой гипотезы, охладившиеся из-за расширения Вселенной до трех градусов Кельвина. Вот почему открытие излучения, поначалу загадочного, а потом опознанного и окрещенного «реликтовым», вызвало такой энтузиазм у приверженцев горячей модели. Никакими другими процессами пока не удалось объяснить существование такого постоянного и обитающего во всех уголках Вселенной излучения.

Горячая модель требует, чтобы существовал еще один вид реликтовых частиц — нейтрино и антинейтрино. Их сегодняшняя температура, если горячая модель в главных своих чертах соответствует действительности, должна равняться двум градусам Кельвина. Сейчас физики лихорадочно стараются поймать эти частицы. Но, как известно, нейтрино — самые неуловимые создания. Они легко, словно сквозь пустоту, проходят сквозь толщу звезд и планет, почти ни с чем не взаимодействуют, не рассеиваются, не отклоняются от своего пути. Чуть ли не в миллион раз нужно повысить точность проводимых сейчас экспериментов, чтобы появилась возможность обнаружить реликтовые нейтрино. Если это удастся, горячая модель выиграет еще одну, вероятно, крупнейшую ставку в игре. Потому что реликтовые нейтрино могли появиться только, если Вселенная действительно имела «горячее начало».

Наше путешествие почти закончено.

Осталась лишь первая секунда творения и гипотетическое «раньше», «до начала», которое то ли было, то ли не было, а может, даже и не могло быть — ведь физики просто не знают, как ведет себя время при исключительных, ненаблюдаемых сейчас условиях, когда плотность вещества приближается к бесконечности; не знают, может ли быть, могла ли быть вообще такая ситуация.

Вспомним известные строки Алексея Константиновича Толстого:

Ходить бывает склизко
По камешкам иным,
Итак, о том, что близко,
Мы лучше умолчим.

Вероятно, на этот раз лучше умолчать о том, что было очень далеко от нас, очень давно... Была ли бесконечной плотность материи, испытала ли Метагалактика некогда сжатие, чтобы, пройдя через эту бесконечную плотность, начать расширяться?.. Эти вопросы пока — за пределами строгой науки.

Вероятно, мы стоим на пороге великих открытий, великих переворотов в постижении фундаментальных законов мироздания. Но кто, какой мудрец осмелится предсказать, когда мы ступим на этот порог?

Не в том ли главная притягательная сила науки, что предсказать такое нельзя, не это ли «вечный двигатель» прогресса?

Случаются открытия, которые для своего объяснения заставляют обращаться к, казалось бы, бесспорным основам теории. И вовсе не для того, чтобы вновь их подтвердить, подкрепить. Совсем наоборот. Они требуют видоизменения основ, потому что «старая редакция» теории не может объяснить новые факты. Об этом у нас уже был разговор, и повторение его — просто предисловие к небольшому рассказу об одном недавно обнаруженном явлении, которое взволновало физиков и астрономов.

Рассказ этот можно начать по-разному, и каждое начало прозвучит достаточно драматично.

Может быть, ни одна из возможных обсуждавшихся моделей Вселенной не соответствует истинному характеру развития нашего мира...

Или так.

Может быть, космологическая постоянная, которой дал жизнь Эйнштейн, чтобы получить свою модель стационарной Вселенной, и которой он же сам решительно подписал смертный приговор, может, эта таинственная постоянная вновь возрождается к жизни, и вообще ее напрасно поторопились похоронить...

Но лучше начинать «от печки», от того наблюдательного факта, с которого все на самом деле и началось.

Сопоставляя фотографии спектров света, идущего к нам от квазаров, астрофизики заметили поразившую их особенность. Примерно у 15 процентов квазаров (а всего их исследовано более ста) оказалось одно и то же красное смещение.

Обычно, чтобы назвать величину красного смещения на языке, общепринятом в науке, пользуются безразмерным параметром z. Этот параметр показывает, во сколько раз красное смещение увеличивает длину волны по сравнению с первоначальной длиной. Если от пришедшей к нам удлинившейся волны отнять длину волны, излученной объектом, и разделить эту разность на первоначальную длину излученной волны, то и получается численное значение z. Например, для того квазара, который удаляется от нас со скоростью около четырех пятых скорости света, длина волны увеличивается в три раза, и значит z будет равно двум.

Если немного всмотреться в цепь этих соотношений, то становится видно, что z здесь играет роль некоего масштаба времени в развитии — в расширении — Вселенной. Совершим мысленный экскурс из самого далекого прошлого, откуда-то из «начала мира», в наш век.

Реликтовое излучение, оставшееся от того времени, когда Вселенной было всего около трехсот тысяч лет от роду, дошло до нас уже не как оптическое, а как гораздо более длинноволновое — радиоизлучение. Для него z равно тысяче. Если будут свидетели еще более ранней стадии жизни Вселенной, то для них z окажется еще бо́льшим. Те квазары, z которых близко к двум, соответствуют метке времени, равной примерно восьми миллиардам лет. Очень интересно, что не удается обнаружить квазаров с z, значительно превышающим два. Это заставляет думать, что на более ранней стадии развития Вселенной, соответствующей бо́льшему z, вещество в ней находилось в другом состоянии — в виде плазмы и излучения. Никаких «организованных» образований — ни квазаров, ни галактик — еще не было. Уменьшение z, то есть уменьшение красного смещения, соответствует приближению к нынешнему состоянию — вплоть до z, равного нулю,— для тех объектов, которые принадлежат к той же системе, к той же «изюмине», что и наша Галактика, и вместе с ней участвуют в расширении Вселенной.

Вернемся к спектрам квазаров. Теперь можно подробнее рассказать, что́ в них так взволновало ученых. Очень странным показалось им некое явление, вернее — сочетание двух явлений. Одно из них уже упоминалось — одинаковое красное смещение, близкое к $z = 2$, примерно у каждого седьмого из ста сфотографированных квазаров. Но это еще не все. В спектрах квазаров присутствовали не только линии, которые оставляет излученный свет, но и линии поглощения. Эти последние, что видно из самого их названия, возникают в том случае, если световые лучи на своем пути от источника к прибору встречают какое-нибудь вещество, поглощающее часть этих лучей.

Так вот, в спектрах десяти квазаров обнаружены линии поглощения, у которых z с большой степенью точности равно одному и тому же числу, а именно 1,95.

Сочетание этих двух наблюденных фактов говорит о том, что в период времени в жизни Вселенной, который соответствует z равному 1,95, в мире было достаточное количество квазаров и достаточное количество поглощающего вещества, возможно — уже сформировавшихся галактик.

Но почему именно при $z=1,95$? Почему не при больших или меньших его значениях? Что это за исключительный отрезок времени, какая-то особенность, причем не в «начале мира», а уже в относительно «тихий» период жизни Вселенной?

Начались поиски объяснения.

Из всех предложенных версий пока только лишь одна представляется в какой-то степени убедительной. Вот как она выглядит в самых общих чертах.

На некоторой стадии развития Вселенной расширение ее стало замедляться и затем фактически прекратилось. Эта остановка, задержка в расширении нашего мира как раз и соответствует $z=1,95$.

Если какое-то длительное время Вселенная находилась в стационарном состоянии, или в почти стационарном, то, естественно, никакого изменения в красном смещении произойти не может — недаром оно есть показатель именно расширения мира. Если остановка началась при $z=1,95$, то сколь бы продолжительной она ни была, окончилась бы она при том же значении z.

Как мы знаем, наш мир сейчас расширяется. Значит, если остановка и произошла, то в силу каких-то причин она снова уступила место нестационарному процессу — расширению Вселенной. Однако за то, может быть, довольно долгое время, пока Вселенная «стояла на месте», и могли совершиться события, в результате которых люди, обитающие на одной из планет Солнечной системы, зафиксировали в 1967 году линии поглощения света квазаров, соответствующие $z=1,95$. За это время могли возникнуть сами квазары. И могли образоваться галактики, в которых, конечно, достаточно вещества, способного поглощать свет. А кроме того, при покое или сильно замедленном расширении луч света может очень долго идти, неся на себе печать одного и того же z. Значит, вероятность встречи таких лучей с какой-нибудь галактикой больше, чем у лучей, z которых меняется за время их путешествия. Вот откуда это таинственное преимущество у линии поглощения, соответствующей $z=1,95$.

Таким образом, недавние астрофизические наблюдения, над которыми ученые всерьез задумались в 1967 году, привели к новому возможному варианту модели Вселенной: расширение, замедление расширения, почти полная и весьма длительная остановка, которая снова сменяется нарастающим расширением. О некоторых деталях этой модели мы еще поговорим. Пока же посмотрим, что, какие свойства Вселенной могли вызвать столь странное ее поведение.

Так как в этой модели есть длительный период, в течение которого Вселенная близка к стационарной, то естественно вспомнить эйнштейновскую стационарную модель — ту, от которой он сам и все остальные отказались после открытия расширения Вселенной. Вспомним также и драматическую историю с космологической постоянной. Может, тогда еще рано было ставить точку... Потому что такое расширение — не монотонное, не постоянное, а с длительной задержкой, можно объяснить только с помощью этой постоянной, при ее присутствии.

Действительно, в модели Эйнштейна эта постоянная описывала какие-то силы отталкивания, которые противодействовали силам тяготения, препятствовали сжатию стационарной Вселенной и тем самым удерживали ее в состоянии равновесия.

А что произойдет, если космологическая постоянная не равна эйнштейновской, а слегка отлична от нее, скажем — чуть-чуть больше? Тогда силы отталкивания перетянут силы притяжения, и Вселенная все-таки будет расширяться. Однако, когда ее радиус станет приближаться к радиусу сферического мира Эйнштейна, условия в двух моделях окажутся сходными, что сразу отразится на поведении Вселенной. Расширение ее сильно замедлится, потом почти вовсе прекратится, и она долго будет походить на стационарную Вселенную Эйнштейна. Причем, чем меньше различаются величины космологической постоянной, тем дольше продлится период остановки. Наконец, силы отталкивания начнут заметно брать верх, расширение возобновится и будет нарастать.

Чтобы такое поведение Вселенной — расширение, остановка и снова расширение — не показалось очень странным, надо помнить, что в ней (если принять описанную модель) идет противоборство почти равных сил притяжения и отталкивания. При этом, во-первых, силы отталкивания несколько превалируют над силами притяжения, а во-вторых, те и другие по-разному зависят от радиуса Вселенной.

В итоге и получается нарисованная сейчас картина мира.

Модель, о которой только что рассказано, предложил Леметр в 1931 году. Но, как мы помним, после открытия Хаббла физики пришли к заключению, что модели с космологической постоянной не соответствуют реальной структуре Вселенной. Ныне, с 1967 года, после другого открытия наблюдательной астрономии — квазаров с одинаковым z,— снова стала всерьез обсуждаться модель с космологическим членом. В частности, советский ученый Карташев рассчитал вариант модели с остановкой — такого типа, как модель Леметра.

Итак, снова космологическая постоянная. Раз она теперь становится главным действующим лицом рассказа, интересно несколько подробнее узнать ее историю. До сих пор нам было известно только то, что Эйнштейн ввел ее в свои уравнения поля тяготения, чтобы обеспечить стационарность созданной им модели Вселенной. А после работ Фридмана, в которых показано, что стационарная модель Эйнштейна — лишь частный случай общего вида моделей расширяющегося мира, и после открытия Хаббла Эйнштейн решительно отказался от космологической постоянной и не раз подчеркивал, что введение ее он считает своей большой ошибкой. Вслед за ним на такую позицию стало и большинство физиков.

Любопытно, а как относился к космологической постоянной Фридман, фактический виновник ее развенчания?

Вернемся снова к первой его работе «О кривизне пространства» и взглянем на нее, имея в виду интересующий нас теперь вопрос.

«Гравитационная постоянная, — пишет Фридман об одном из своих расчетов, — удовлетворяет системе уравнений Эйнштейна с так называемым «космологическим членом», который может быть, в частности, равен нулю».

Как мы знаем, в эйнштейновской модели космологический член непременно отличен от нуля — именно на этом она и стоит.

Далее Фридман приводит уравнения, из которых получает возможные модели нестационарного мира. В них тоже присутствует космологическая постоянная, по поводу чего автор замечает: «при этом, конечно, величина λ не определяется сама собой, и мы при изучении уравнений будем предполагать, что λ может принимать любое значение».

Выполнив свою программу, исследовав уравнения с всевозможными значениями λ, в том числе и с постоянной, равной нулю, Фридман так заключает эту статью:

«Данные, которыми мы располагаем, совершенно недостаточны для каких-либо численных подсчетов и для решения вопроса о том, каким миром является наша Вселенная; следует отметить, что в полученных нами формулах «космологическая» величина λ не определяется, являясь лишней константой задачи... Полагая $\lambda=0$ и считая M (всю массу Вселенной) = массе $5 \cdot 10^{21}$ наших солнц, будем для периода мира иметь величину порядка 10 миллиардов лет».

Дальнейшее нам известно. В том числе и такое точное совпадение фридмановского времени жизни Вселенной с принятым сейчас.

Итак, космологическая постоянная оказалась лишней константой, лишней постоянной в задаче. И все рассмотренные модели расширяющейся Вселенной — с положительной, нулевой и отрицательной кривизной — получаются, если положить ее равной нулю. Значит, ее присутствие не обязательно. Раз лишняя — значит, ненужная. И физики довольно единодушно решили считать ее равной нулю, то есть попросту говоря ненужной.

Но теперь, в связи с ее новым выходом на сцену, стали обсуждаться некоторые принципиальные вопросы построения физической теории. В теоретической физике доминирует правило: если можно обойтись без лишней постоянной, то ее вводить не надо. В данном случае говорилось, что если считать космологическую постоянную тождественно равной нулю, то теория будет более простой, цельной и красивой.

Однако другие ученые придерживались противоположного мнения. Для них довод «можно обойтись и без космологической постоянной» не казался убедительным. Наоборот, они считали, что теория, содержащая этот член, как раз более естественна и красива — потому что более обща.

И, наконец, «умеренные» предложили свой подход к проблеме космологической постоянной: хотя ее присутствие и допустимо, но не очень естественно; а главное, имеющийся наблюдательный материал еще крайне невелик и не дает никаких поводов для «утяжеления» теории добавкой новой постоянной.

Сейчас, как мы знаем, сам наблюдательный материал заставил вернуться к обсуждению «λ-проблемы». Так или иначе, к какому выводу ни придет космология, все понимают, что вопрос будет решаться не большинством голосов. И вкусы и пристрастия отдельных ученых тоже должны будут отступить перед фактами.

В нынешней ситуации, возникшей благодаря новым наблюденным фактам, рассматривается одна модель с конкретными характеристиками: известная нам модель Леметра — частный случай фридмановских моделей с космологической постоянной. Кардашев, использовав сегодняшние данные теоретической и наблюдательной астрономии, рассчитал, как должна была развиваться Вселенная, чтобы после длительной задержки, соответствующей $z = 1,95$, прийти к теперешнему своему состоянию.

Вот как выглядит нарисованная им картина. Вселенная представляет собой замкнутый мир положительной кривизны. После пяти миллиардов лет довольно интенсивного расширения она пришла в почти стационарное, равновесное состояние. Силы, сжимающие и растягивающие ее, уравновесились. Расширение фактически прекратилось. Остановка длилась долгих пятьдесят пять миллиардов лет. К этому времени единоборство противодействующих сил завершилось победой сил отталкивания — ведь в этой модели λ чуть больше эйнштейновской, обеспечивающей «вечный покой». Вселенная снова начала расширяться. Этот процесс продолжается уже около десяти миллиардов лет — и по сей день.

Если модель с остановкой окажется более близкой к действительности, чем модель непрерывно расширяющейся Вселенной, то значит, наш мир существует гораздо дольше — примерно в семь раз, чем предполагалось до сих пор. Кардашев рассчитал для своей модели еще две фундаментальные величины. Радиус кривизны Вселенной равен ста пятидесяти миллиардам световых лет, а средняя плотность материи равняется $1,8 \cdot 10^{-30}$ грамма в кубическом сантиметре. Во время остановки радиус был в три раза меньше, а плотность — в тридцать раз больше.

Читая такие определенные цифры или точное описание последовательности событий в жизни Вселенной, надо все время помнить, что речь идет пока о гипотезе, основанной, помимо теоретических соображений, только на одном факте. Причем этот факт, во-первых, не считается еще полностью проверенным и доказанным, а во-вторых, делаются попытки — правда, до сих пор безуспешные, — истолковать его как-то иначе.

Но астрофизики полагают, что данная конкретная модель будет подтверждена или отвергнута в течение ближайших нескольких лет. Оба исхода возможны, потому что в модели присутствует немалое число трудностей и знаков вопроса. Хотя, вероятно, и для любой другой модели трудностей окажется тоже очень много.

Так или иначе, теперь, как никогда прежде, представляется, наконец, реальной возможность найти тот тип нестационарной модели, который ближе всего подходит к нашему действительному миру.

В этой книжке мы узнали о многих великих открытиях. Но все это — уже история, правда, иногда и очень близкая. Теперь, буквально на наших глазах — сегодня, завтра, послезавтра — решается одна из фундаментальнейших загадок науки — как устроена, как развивается Вселенная и сколько ей лет. Конечно, нет у ученых ни такой наивности, ни сатанинской гордости, чтобы тешить себя надеждой на полное и окончательное решение. Но, безусловно, космология подходит к одному из важнейших периодов в своей жизни.

Если модель с остановкой и выйдет из игры, это вовсе не будет означать, что снова выходит из игры космологическая постоянная. Как, не сговариваясь, повторяют многие физики, джинн выпущен из бутылки и загнать его назад теперь уже нелегко.

Даже если окажется, что величина космологической постоянной настолько мала, что практически никак не сказывается на строении и развитии Вселенной, все же физикам по-прежнему будет важно узнать, очень ли она мала, близка к нулю, или в точности и при всех обстоятельствах, то есть тождественно равна нулю. Определение истинного значения λ становится теперь одной из главных задач космологии. Оно имеет, можно сказать, не боясь преувеличений, огромное принципиальное значение. Потому что отличие λ от нуля отражает новое для науки фундаментальное свойство пространства.

Здесь мы подходим к самому интересному — к физическому содержанию космологической постоянной.

В самом деле, до сих пор речь шла прежде всего о том, как и почему появилась эта постоянная, для чего она понадобилась и что от нее зависит. Теперь посмотрим, что она есть сама по себе.

Эйнштейн связывал ее с какими-то силами отталкивания, препятствующими стягиванию Вселенной, хотя источник этих сил был совершенно неясен. Вероятно, точнее назвать их силами, воздействующими на само пространство. Космологическая постоянная имеет ту же размерность, что и кривизна. Она есть не что иное, как кривизна вакуума — пустого, свободного от материи пространства.

Но мы-то знаем, что искривление пространства возникает как раз оттого, что в нем присутствует материя. Теперь получается, что пустое пространство создает гравитационное поле, как будто бы в нем находится материя с определенной плотностью — а материи ведь нет! Чтобы выйти из этого затруднения, приходится предположить, что вакуум обладает какой-то прежде неизвестной особенностью. Эту особенность физики связывают с квантовыми процессами. Они подчеркивают, что сейчас, в «квантовую эпоху», вопрос о вакууме, о его свойствах совсем не так прост, как считалось прежде, хотя бы во времена Максвелла, да и много позднее тоже. С этими свойствами, вероятно, теснейшим образом связаны различные взаимодействия элементарных частиц.

Советский физик Андрей Дмитриевич Сахаров рассмотрел связь между общей теорией относительности и процессами, которые могут происходить с вакуумом. Имея в виду эти процессы, он предположил, что в пространстве существует определенная элементарная длина. Эта длина есть предел действия общей теории относительности. Для еще меньших расстояний она уже неприменима. Может быть, удивительное свойство вакуума, которое соотносят с космологической постоянной, и возникает, если рассматривать расстояния, меньшие, чем критическая элементарная длина.

Эксперимент показывает, что еще на расстояниях, в десять раз меньших, чем размер протона, никаких расхождений с теорией относительности не обнаружено. А дальше? Что ждет физиков, когда им удастся исследовать взаимодействия частиц на расстояниях еще в десять, в сто раз меньших? Конечно, весьма вероятно, что они окажутся уже у самого предела, за которым наши представления, наши законы пространства и времени неприменимы. Может, они даже перейдут предел. Так откроется нечто для нас, сегодняшних, непредставимое.

Сама величина космологической постоянной, по нынешним расчетам, очень мала, меньше 10^{-54} *см*$^{-2}$, а значит, и очень мала кривизна вакуума. Но важна, как уже говорилось, не только ее абсолютная величина, а и сам факт — может или не может у вакуума быть кривизна. Таким образом, вопрос о существовании космологической постоянной и ее величине приобретает огромное значение не только для космологии, но и для теории элементарных частиц.

Так космология словно смыкается с теорией элементарных частиц в двух точках. Одна — начало мира, потому что начальная фаза развития Метагалактики, само ее происхождение теснейше связаны с возникновением и взаимным превращением элементарных частиц; это, так сказать, временна́я особенность. Вторая точка — свойства вакуума, пространственная особенность.

Что даст наука в ближайшие годы? Разумеется, это трудно предугадать. Но, наверное, даст очень многое. И какими бы удивительными, ошеломляющими ни были ее открытия, все равно, ученые с полным правом смогут сказать, что их современниками в науке остаются не только Эйнштейн и Фридман, но и Лобачевский, первооткрыватель «нового мира», и Риман, и Клиффорд. Своими идеями все они подошли вплотную к сегодняшним проблемам; трудами своими они продолжают участвовать в решении самых сложных задач, раскрывающих тайны строения и Вселенной и микромира.

Но и через десять, и через двадцать, и через сто лет ученые будут убеждаться в том, что рядом с ними попрежнему стоят те, кто в свое, пусть далекое, время тоже был первопроходчиком в науке.

Таково свойство великих людей и великих идей — жить, вечно жить и вечно работать на будущее!

Содержание

Стр.

ТРИ СУДЬБЫ

Пятый постулат

Новый мир

Разными дорогами

ПОСТИЖЕНИЕ МИРА

Риман

Геометрия Вселенной

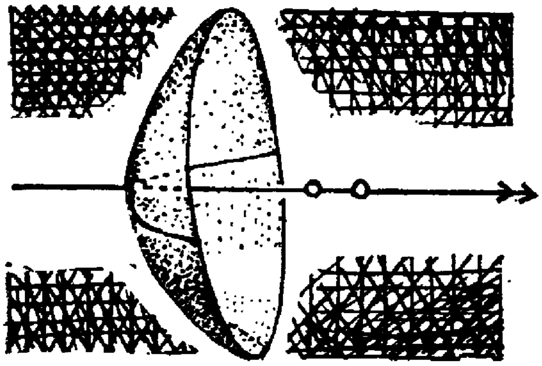
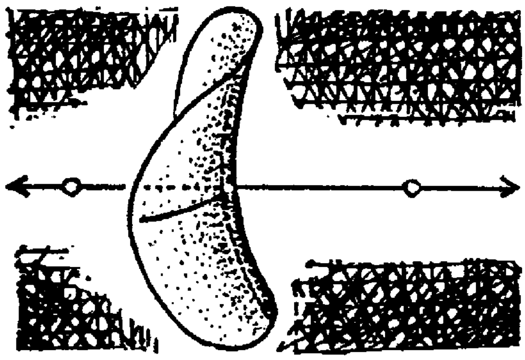
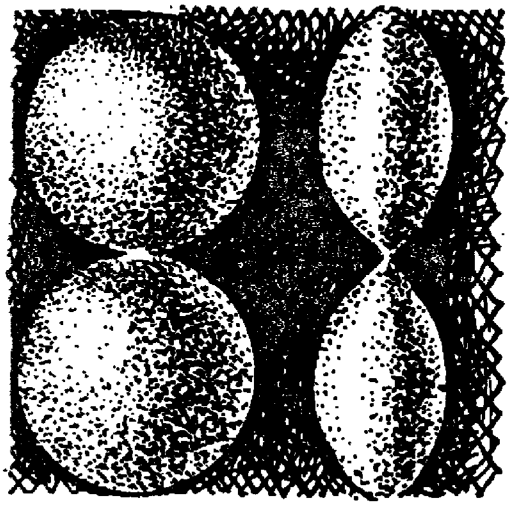
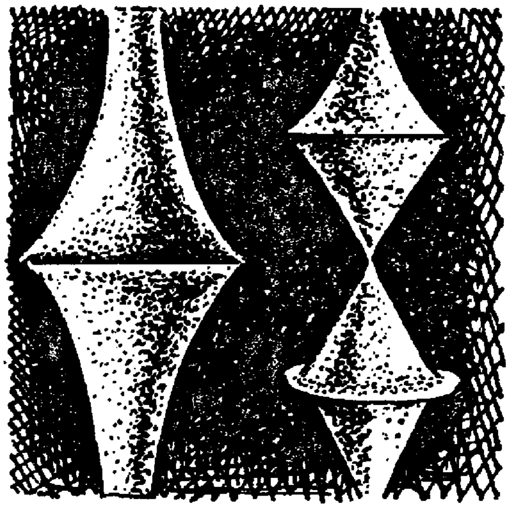
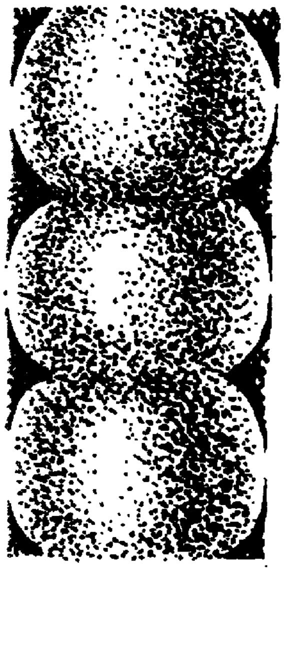
АННА ЛИВАНОВА

ТРИ СУДЬБЫ
ПОСТИЖЕНИЕ МИРА

Редактор *Г. Н. Малинина.* Художник *В. И. Бродский.* Худож. редактор *Т. И. Добровольнова.* Техн. редактор *Е. М. Лопухова.* Корректор *И. И. Поршнева.*

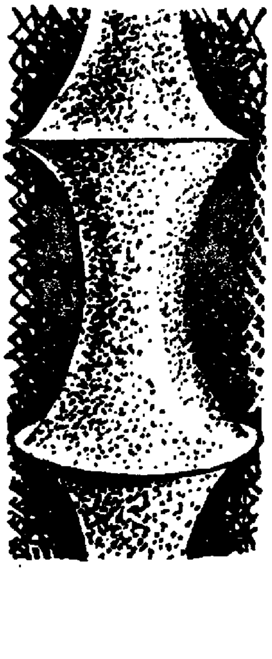
А 01330. Сдано в набор 28/II 1968 г. Подписано к печати 15/I 1969 г. Формат бумаги 84 × 108¹/₃₂. Бумага глазированная № 2. Бум. л. 5,5. Печ. л. 11,0. Условн. печ. л. 18,48. Уч.-изд. л. 17,99. Тираж 100 000 экз. Издательство «Знание». Москва, Центр, Новая пл., д. 3/4. Заказ 719. Набрано в типографии изд-ва «Знание». Москва, Центр, Новая пл., д. 3/4. Цена 58 коп.

Отпечатано в ордена Ленина типографии «Красный пролетарий». Москва, Краснопролетарская, 16. Заказ 2440.

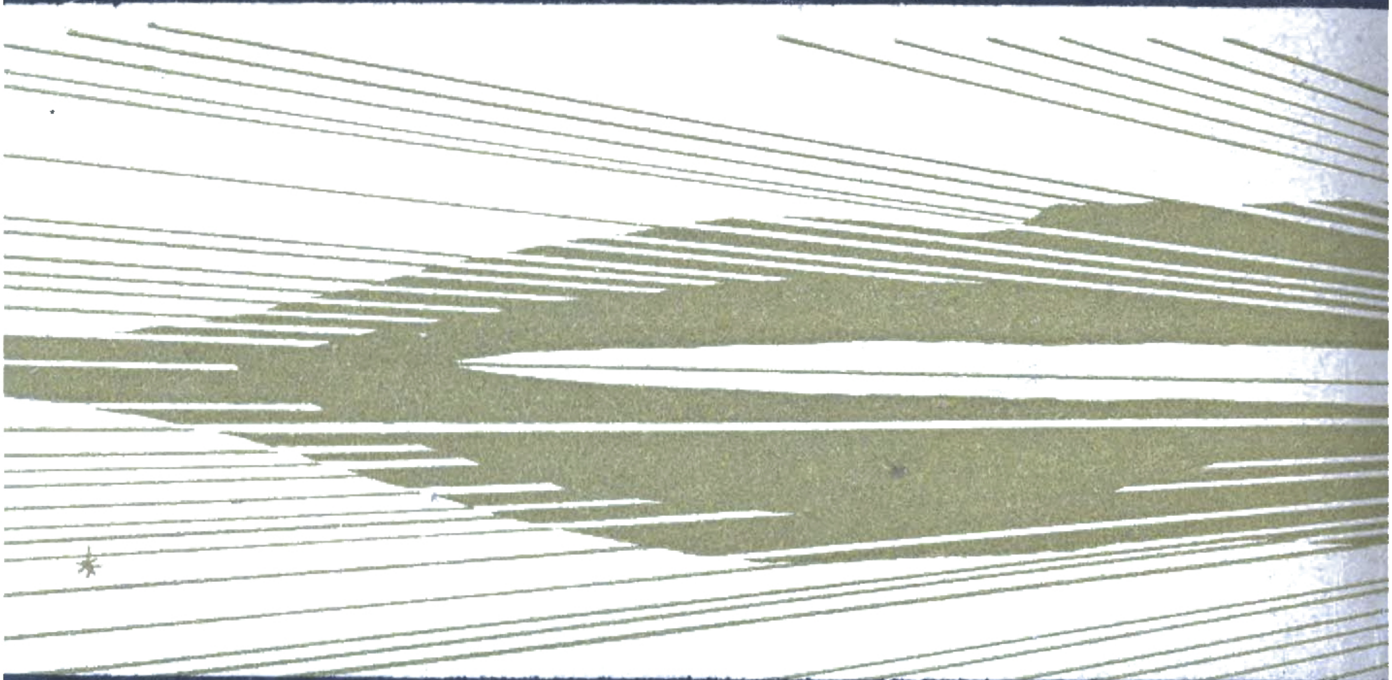






Поверхности постоянной отрицательной кривизны — псевдосферические — служат моделями плоскости Лобачевского. На поверхностях постоянной положительной кривизны осуществляется геометрия Римана.

Сверху слева поверхность постоянной положительной кривизны — оба главных радиуса кривизны положительны; справа — поверхность постоянной отрицательной кривизны, один ее главный радиус положителен, а другой отрицателен

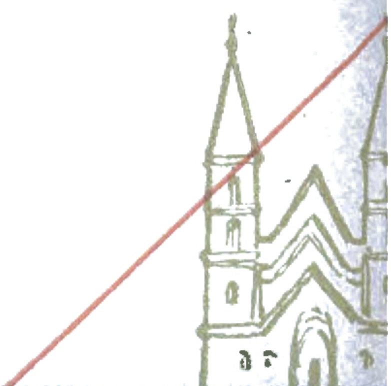


ЖИЗНЬ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ ИДЕЙ



ЗНАНИЕ

58 коп.



ИЗДАТЕЛЬСТВО «ЗНАНИЕ»